Etapa Superestructural de la Integral*

Superestructural Stage of Integral*

Fase estrutural da integral*

Daniel Steven Moran Pizarro**
Carlos Mario Jaramillo López***
José María Sigarreta Almira****

Universidad de Pamplona – Colombia
Universidad de Antioquia – Colombia
Universidad Autónoma de Guerrero – México

Fecha de Recibido: Enero 24 del 2018
Fecha de Aceptación: Marzo 13 de 2018
Fecha de Publicación: Abril 01 de 2018
DOI: http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v10i2.511

* Artículo resultado de investigación "Etapa Superestructural de la Integral", iniciada en el grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle y continuada en la Universidad Autónoma de Guerrero, apoyada por CONACYT y por el grupo EDUMATH de la Universidad de Antioquia.

**Magíster en Matemáticas, Docente Tiempo Completo Ocasional, Departamento de Matemáticas, Filiación: Universidad de Pamplona. Correo electrónico: daniel.moran@unipamplona.edu.co Orcid ID: https://orcid.org/0000-0003-1791-2818

*** Doctor en Matemáticas, Profesor Titular del Instituto de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Filiación: Universidad de Antioquia. Correo electrónico: carlos.jaramillo1@udea.edu.co Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-3937-5032

**** Doctor en Ingeniería Matemática, Profesor investigador Titular C de la Facultad de Matemática, Filiación: Universidad Autónoma de Guerrero. Correo electrónico: jsmathguerrero@gmail.com Orcid ID: https://orcid.org/0000-0003-4352-5109

Resumen

El objetivo del artículo es demostrar la transición en la cual el problema "encontrar la cuadratura de una figura plana", fue posible formalizarla mediante el concepto de integral matemática. Para comprender esta formalización, se abordó un análisis histórico de la evolución del concepto de integral. Conclusión: se propuso una nueva fase en la constitución misma de este concepto, denominada *etapa superestructural de la integral*.

Palabras clave: Cuadraturas, Epistemología, historia de las matemáticas, integral.

Abstract

The objective of this paper is to show the transition period in which the problem of finding the squaring of a flat figure was possible to formalize it through the concept of mathematical integral. To understand this formalization, a historical analysis of the evolution of the concept of integral will be discussed, and a new phase will be proposed in the constitution of the concept of integral, called the *superstructural stage of the integral*.

Keywords: quadratures, epistemology, history of mathematics, integral.

Resumo

O objetivo deste artigo é mostrar a transição em que o problema de encontrar o quadrado de uma figura plana foi possível formalizá-lo através do conceito de integral matemática. Para entender esta formalização, será abordada uma análise histórica da evolução do conceito da integral, e uma nova fase será proposta na própria constituição deste conceito, denominado estágio superestrutural da integral.

Palavras-chave: quadraturas, epistemologia, história da matemática, integral.

Introducción

Muchos investigadores han conducido estudios sobre el establecimiento del concepto moderno de integral matemática. Por ejemplo, en artículos como (Lesh & Landau, 1983), (Sfard, 1991) y (Skemp, 1971) muestran la íntima relación entre objeto y proceso, y cómo esto puede ser aplicado a la comprensión de las nociones matemáticas (Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2013).. Estudios más especializados sobre la evolución del concepto de integral pueden encontrarse en (Hawkins, 1970), (Michel, 1992) y (Pier, 1996). Además, la afirmación hecha arriba por Piaget sugiere que para entender la manera en la cual las nociones matemáticas emergen como conceptos, es necesario entender cómo ellas dejan de ser simples herramientas para resolver problemas y adquieren un estatus ontológico distinto que amerita un estudio propio e independiente.

En este sentido, este artículo analiza principalmente tres aspectos relevantes e inherentes a la naturaleza del concepto:

- Estudio histórico-epistemológico de la integral.
- Una posible clasificación (desde un punto de vista epistemológico) del concepto.
- Propuesta de una nueva etapa para comprender el concepto.

Estudio histórico-epistemológico de la integral

Analizar la epistemología en el contexto mismo de la historia de las matemáticas, implica necesariamente hablar de los antiguos griegos, quienes fueron capaces de plantear tres problemas que posteriormente se han mostrado que no poseían solución (las técnicas modernas del Álgebra de Galois han demostrado esta imposibilidad). Estos problemas básicamente estaban relacionados con el uso de una regla no graduada y compás, los cuales son:

1. Sea Q un cubo de volumen $V(Q)$. Encontrar un cubo Q' con el doble del volumen, esto es $V(Q') = 2V(Q)$.
2. Sea θ un ángulo. Encontrar su tercera parte, esto es $\theta/3$.
3. Sea $\mathcal{C}$ un círculo. Encontrar un cuadrado equivalente (en área) a $\mathcal{C}$.

Se puede observar que estos problemas están íntimamente ligados a la construcción de ciertos números que no son posibles mediante regla y compás (números trascendentes). Por ejemplo, el tercer problema es equivalente a la construcción del número irracional $\sqrt{\pi}$, el cual no es construible con regla y compás. Muchos matemáticos estuvieron interesados en resolver estos problemas planteados en el siglo V a.C., pero no lograron resolverlos. Sin embargo, a pesar de estos intentos fallidos, las respuestas dadas sirvieron como arsenal fértil para el desarrollo de muchas ramas de las matemáticas. Esas respuestas parciales marcaron, en muchos aspectos, el derrotero de la evolución matemática por más de 25 siglos (Recalde, 2007, pág. 108). Particularmente nos enfocaremos en el último problema (conocido como la cuadratura del círculo).

Respuesta de los antiguos griegos

Euclides no logró encontrar el cuadrado equivalente al círculo. Sin embargo, mediante su idea de aplicaciones de áreas logró encontrar el área de un cuadrado equivalente al de una figura rectilínea.

Teorema 1. (Proposición II,14. Elementos de Euclides). *Sea Σ una figura rectilínea. Encontrar un cuadrado equivalente a Σ.*

Demostración. La idea básica de la prueba de Euclides es la siguiente:

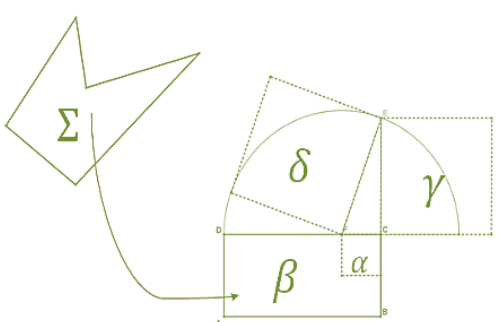

Figura 1: Proposición II,14. Elementos de Euclides.
Fuente: Autores

En su libro I, Euclides muestra cómo encontrar un rectángulo equivalente a una figura rectilínea. Sea β un rectángulo equivalente a Σ. Sea γ el cuadrado sobre la media proporcional entre los segmentos DC y BC (el mismo que determina a β). Afirmamos que $\Sigma = \gamma$. En efecto, por la proposición II,7; Euclides muestra que $\beta + \alpha = \delta$ (donde α es el cuadrado construido sobre los puntos donde se ha seccionado al segmento DC), y por el teorema de Pitágoras $\alpha + \gamma = \delta$. Entonces $\beta + \alpha = \alpha + \gamma$; y por tanto, $\Sigma = \beta = \gamma$.■

La respuesta de Euclides puede considerarse plausible, porque si tenemos un polígono de 4 lados (cuadrado), y duplicamos sus lados (octógono, 8 lados), y así sucesivamente; este polígono tiende a ser un círculo. En términos modernos, decimos esto:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = C \qquad (1)$$

donde P_n es un polígono de n lados.

No contar con una operación que formalizara los procesos infinitos fue el problema fundamental por el cual los antiguos griegos no lograron dilucidar la noción de límite, que se precisaba para la solución al problema de la cuadratura del círculo. Euclides intuyó la solución y además aportó los elementos primarios para que posteriormente, esta operación del límite tuviera un lugar importante en las matemáticas.

Teorema 2. (Proposición X,1. Elementos de Euclides.) *Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad, y de la que queda, una magnitud mayor que su mitad, y así sucesivamente, al final quedará una magnitud que será menos que cualquiera de las magnitudes dadas.*

Esta proposición está estrechamente relacionada con la urgente necesidad de desentrañar los respectivos procesos infinitos involucrados. En términos modernos, nosotros hablamos de épsilon y deltas, como en la moderna definición del límite matemático, y por supuesto, de la integral. Desde ese punto de vista, Euclides se refiere a lo siguiente:

Sea M una magnitud y $\epsilon > 0$. Entonces,

$$\left(M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n\right) \to \forall\epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, M_n < \epsilon \qquad (2)$$

Aristóteles llamó a esta proposición el "Axioma de Arquímedes", puesto que, en éste, Arquímedes se basó para inaugurar el método exhaustivo. Este es un importante lema para probar que los círculos son entre sí, como los cuadrados de sus diámetros. A partir de este hecho, Euclides muestra (en términos modernos) lo siguiente: Sea R una figura plana acotada por una curva cerrada simple. Sea $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polígonos inscritos en R, estrictamente creciente. Definimos la siguiente sucesión de diferencias como sigue:

$$M_0 = R - P_0, M_1 = R - P_1, \dots, M_n = R - P_n$$

la cual es estrictamente decreciente. Entonces, si es cierto que

$$\left(M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n\right) \to \forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, M_n < \varepsilon$$

$$(\{P_n\} \to P) \to \forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, P - P_n < \varepsilon \qquad (3)$$

Entonces

$$R = P \qquad (4)$$

Por condiciones como estas, implícitas en la antigüedad, es que muchos estudiosos de la historia de las matemáticas, sugieren que en la cultura matemática griega existían elementos primitivos de nociones del límite y de la integral, entre muchas otras nociones matemáticas.

Una de las cuadraturas más importantes resueltas en la antigüedad fue la cuadratura de la espiral de Arquímedes. En esta, Arquímedes hace uso de la doble contradicción para demostrar que el área encerrada por la espiral inscrita en un círculo C es $\frac{1}{3}a(C)$. Considérese la siguiente figura:

Sea γ una espiral de Arquímedes y sea C el círculo que la circunscribe. Divídase el círculo en n partes iguales y sean $O, A_1, A_2, \dots, A_n$las intersecciones de los sectores del círculo con la espiral.

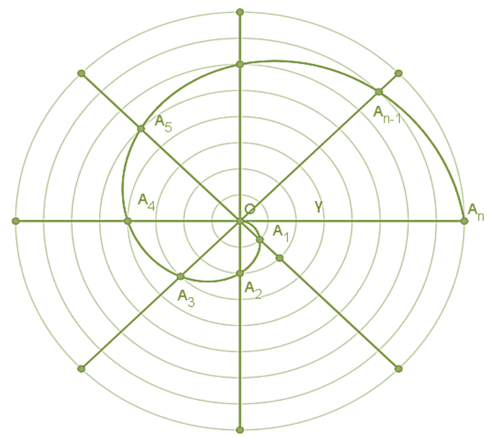

Figura 2. Espiral de Arquímedes. Fuente: Adaptado Autores

Considérese $OA_1 = c$, $OA_2 = 2c$, …, $OA_n = nc$. De esta manera, la región espiral E contiene una región P, formada por sectores circulares inscritos P_i, de radios $0, c, \dots, (n-1)c$ y está contenida en una región Q, formada por sectores circunscritos Q_i, de radios $c, 2c, \dots, nc$, con lo que se verifica fácilmente que $a(P) < a(E) < a(Q)$.

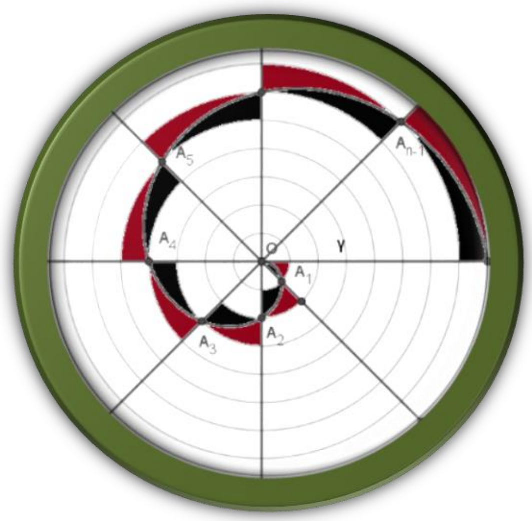

Figura 3. Sectores inscritos (negro) y circunscritos (rojos) de la espiral de Arquímedes. Fuente: Adaptado Autores

La expresión $a(Q) - a(P)$ es igual al área de un sector circular y por tanto puede hacerse tan pequeña como se quiera toma n lo suficientemente grande. A continuación se demostrará con el rigor de la doble reducción al absurdo que el área de la espiral es $a(E) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$.

Al suponer que $a(E) < \frac{1}{3}a(C)$ y sea n suficientemente grande para que se verifique que

$$a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(E) \tag{5}$$

Como $a(P) < a(E)$, entonces se tiene que $a(Q) < \frac{1}{3}a(C)$. Con el fin de llegar a una contradicción mostraremos que $\frac{1}{3}a(C) < a(Q)$. En efecto, Euclides mostró que los círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios, entonces

$$\frac{a(Q_i)}{a(C_i)} = \frac{(ic)^2}{(nc)^2}, \quad i = 1, \dots, n \tag{6}$$

donde C_i son los sectores del círculo C circunscrito a la espiral.

De esta última igualdad, al aplicar las propiedades de la suma de proporciones, se obtiene que

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{c^2+(2c)^2+\dots+(nc)^2}{n(nc)^2} = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} > \frac{1}{3}1 \tag{7}$$

De esta última desigualdad se obtiene que

$$a(Q) > \frac{1}{3}a(C) \tag{8}$$

lo que contradice la desigualdad anterior, y de esta manera no puede suceder que $a(E) < \frac{1}{3}a(C)$.

Análogamente tampoco puede ser mayor, es decir, si $a(E) > \frac{1}{3}a(C)$, se logra llegar a las desigualdades $a(P) > \frac{1}{3}a(C)$ y $a(P) < \frac{1}{3}a(C)$, es decir, a una contradicción. Luego, por tricotomía, se llega al resultado[2] (Edwards, 1982):

$$a(E) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 \tag{9}$$

Al generalizar de sumas de enteros sucesivos, es posible encontrar la cuadratura de una espiral generalizada, esto es, espirales de la forma $r = a\theta^n$, donde tras un cambio, aparecían ideas de cálculo de parábolas generalizadas $y = a^n$, obteniendo así resultados equivalentes a la cuadratura básica:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \tag{10}$$

La cuadratura básica (que posteriormente se corresponde con la integral de una potencia) se constituye como una piedra angular para el posterior desarrollo de la noción de integral, idea que posteriormente fue retomada por Bonaventura Cavalieri a principios del siglo XVII. Estas generalidades son posible obtenerlas con un procedimiento análogo, de la expresión usada por Arquímedes, de esta manera:

$$1^k + 2^k + \cdots (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^{k+1} \tag{11}$$

que finalmente terminan siendo los límites modernos de Sumas de Riemann de una forma generalizada. Lo importante de todo esto es que desde la antigüedad figuraban huellas de la integral, y esto apoya la idea de que el conocimiento matemático más que ser resultados aislados, a través del tiempo, se ha mostrado como una construcción histórica.

La integral en la emergencia del Cálculo: Técnicas de causalidad

1 Esta desigualdad resulta ser consecuencia del siguiente resultado de Arquímedes: $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, resultado probado por argumentos geométricos.

2 Es de anotar que este resultado se puede obtener fácilmente por integración doble en coordenadas polares: Sea $r(\theta) = a\theta$, entonces $A = \iint_R dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{a\theta} r dr d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$.

El método exhaustivo de Arquímedes (y Euclides) es la base de la definición moderna de integral, porque se evidencia claramente que este método tiene como fundamento el contexto geométrico que contiene las nociones básicas para una comprensión coherente del concepto del límite ligado estrechamente a la definición rigurosa de la integral. Es importante resaltar que en estos tiempos antiguos había un interés por el estudio de las curvas y era posible develar en sus escritos una aproximación al concepto de límite. Además, había necesidad de que en el desarrollo del tiempo surgieran otras construcciones entre las cuales está una noción de función, para que ligada al concepto de límite, pudiera consolidarse el concepto de integral. Es por esto que un análisis a la evolución del estudio de las curvas, nos permite determinar cómo a través del tiempo, el razonamiento matemático y el establecimiento de una formalización pertinente, alcanza estos logros para el desarrollo del cálculo.

La integral en la emergencia del Cálculo: Técnicas de causalidad

El cambio drástico en el tratamiento de curvas fue dado por Descartes (1596-1650) en su importante trabajo *Discurso del método*, se puede apreciar que él cambió la forma de hacer matemáticas, estableciendo una conexión entre los elementos del cálculo aritmético y los de segmento y plano la geometría. A través de un sistema de dos rectas que no se superponen (posiblemente ortogonales), él introdujo lo que hoy día es llamado *plano cartesiano*. Dada una curva C, es posible asignar una ecuación que la gobierna, de la forma $P(x, y) = 0$. Descartes también define cómo es posible establecer una aritmética entre segmentos; por ejemplo, multiplicación y extracción de raíces. En este sentido, establece una relación biunívoca entre curvas y ecuaciones: a una curva le corresponde una única ecuación cartesiana, salvo múltiplos de la misma. Así, la parábola deja de estar amarrada a la existencia de un cono, y pasa a existir ella misma mediante el plano cartesiano, como el conjunto de puntos (x, y) tales que $x^2 - y = 0$.

Los indivisibles de Cavalieri

El rigor de Arquímedes era demasiado tedioso para demostrar que una figura correspondía a la cuadratura de otra. El método consistía en una doble reducción al absurdo: asumían que era mayor, o que era menor; y en ambos casos, se llegaba a una contradicción. Con el fin de evitar esta tediosa manera geométrica de demostrar resultados, los matemáticos del siglo XVII usaron algunos métodos heurísticos, métodos poco rigurosos, pero que generaron prolíficos resultados. Por ejemplo, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) establece una técnica conocida como la de los "indivisibles" que grosso modo, consiste en lo siguiente:

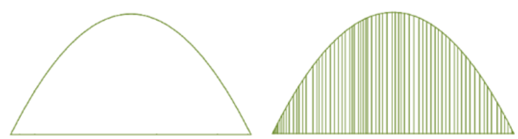

Figura 4. Indivisibles de Cavalieri para regiones.
Fuente: Adaptado Autores

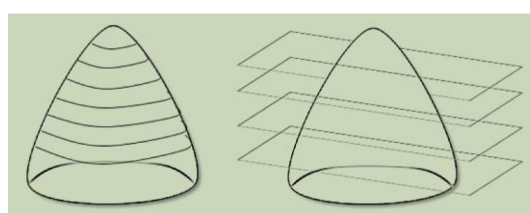

Figura 5. Indivisibles de Cavalieri para superficies.
Fuente: Adaptado Autores

Un indivisible es un objeto geométrico de una dimensión inmediatamente menor, por ejemplo, los indivisibles de una línea, son puntos; los indivisibles de una región, son líneas; los indivisibles de un volumen (3D) son planos (2D) y así sucesivamente. En otras palabras, una región puede ser obtenida por "suma de líneas" de una manera conveniente. Cavalieri llamó "ominus" a este tipo de suma. "Ominus linae" significa "suma de todas las líneas". El símbolo que usó fue Omn. Él, mediante la geometría de Descartes, probó que:

$$\mathrm{Omn}(x) = \frac{a^2}{2} \qquad (12)$$

Con métodos algebraicos. Además, hizo una generalización para n grande.

$$\mathrm{Omn}(x^2) = \frac{a^3}{3}$$

$$\mathrm{Omn}(x^3) = \frac{a^4}{4}$$

$$\mathrm{Omn}(x^4) = \frac{a^5}{5}$$

$$\mathrm{Omn}(x^5) = \frac{a^6}{6}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Omn}(x^n) = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Se observa entonces, que cualquier parecido con la realidad no es pura coincidencia, en tanto que, al utilizar métodos algebraicos, Cavalieri (intuyendo la noción de límite) encontró una generalización para lo que posteriormente fue la integral de una potencia:

$$\int_0^a x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad (13)$$

Queda una pregunta abierta: ¿Cómo es posible que la suma de todas las líneas (cuya integral sabemos, es igual a cero) pueda dar como resultado una región plana?

Cuadraturas de Fermat y de Wallis

Con el fin de salvar un poco el rigor perdido con los indivisibles de Cavalieri, Fermat propuso una idea similar de suma, pero añadiendo elementos homogéneos. La idea era simple: añadir rectángulos de base muy pequeña y, por lo tanto, la suma de las áreas de los mismos es igual al resultado del área del conjunto de rectángulos considerados. Cuando la base se acerca a cero (modernamente, esto es considerar una partición del dominio cuya norma tienda a cero) entonces el área inscrita tiende a ser el área a calcular.

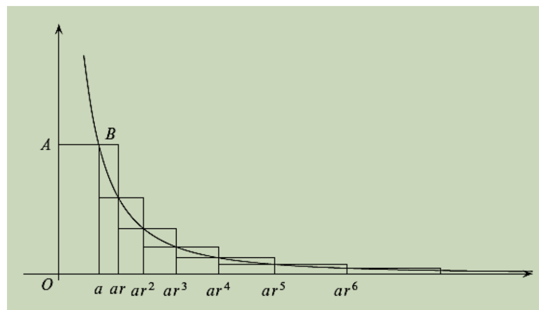

Figura 6. Cuadratura de la hipérbola por Fermat

Fermat realiza este proceso, a través de progresiones geométricas. En este caso (la hipérbola), sea $r > 1$ y consideremos los puntos de abscisas a, ar, ar^2, ar^3; entonces los rectángulos inscritos tienen como área:

$$(ar-a)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^2-ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \cdots = \frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} \qquad (14)$$

Y los triángulos circunscritos tendrán por área

$$(ar-a)\frac{1}{a^2} + (ar^2-ar)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \cdots = \frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{r}{a} \qquad (15)$$

Entonces, la cuadratura (el área bajo la curva) está acotada por las dos expresiones anteriores. Sea S la cuadratura, entonces:

$$\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a} \qquad (16)$$

Como la desigualdad es válida para todo $r > 1$, él concluye que el área $s = \frac{1}{a}$. Vemos cómo en las consideraciones establecidas por Fermat, se encuentran elementos de la integral definida, inscribiendo y circunscribiendo rectángulos infinitamente pequeños. La discusión acerca de los indivisibles vs. infinitesimales (como en Cavalieri) es un amplio tema de discusión. (Hawkins, 1970) es una excelente referencia para profundizar en ello.

De otro lado, es importante destacar que Wallis logró establecer una aritmética para los indivisibles. En su obra *Arithmetica Infinitorum* establece que el área de un rectángulo es el producto de la base por la altura, con el propósito de asignar un número al área de una región plana. Con esta idea, él pretende formalizar el área de figuras planas. Por lo tanto, asumiendo esta postura, al parecer estaba intentado analizar la formalización de la noción de función:

$$f : \{\text{figuras planas acotadas}\} \to \mathbb{R}_0^+$$

Es decir, asignar un número a eso que llamamos área. Pero no contamos con esa reglilla que mida, llamada $\mathbb{R}$. Los esfuerzos posteriores buscan formalizar la idea de número real. Para profundizar en la relación número y magnitud, ver (Dhombres, 1980).

Es importante tener en cuenta que Euclides ha resuelto el problema de encontrar la cuadratura del rectángulo; Arquímedes hizo lo mismo para la parábola; Cavalieri hizo una gran contribución al generalizar la cuadratura de las curvas de la forma x^n, donde n es un entero positivo (ya que n emula la dimensión); Roberval encontró la cuadratura de la cicloide y Fermat la de la Hipérbola. Los procedimientos son diferentes e independientes (no es el mismo proceso de cuadratura de la parábola que el de la hipérbola, son tratamientos *distintos*). Los matemáticos son conscientes de que existe un problema (el problema de las cuadraturas), pero hay una serie de técnicas independientes para resolver el problema y casos de curvas muy particulares. La sistematización de todas estas técnicas es necesaria, la cual permite el tránsito de lo particular a lo general, y así tener un algoritmo de resolución. Este trabajo de sistematización fue hecho por dos gigantes: Newton y Leibniz.

Las contribuciones de Newton y Leibniz

La sistematización de todas estas anteriores técnicas de cuadraturas se deben a Newton y Leibniz. Newton recogió toda la tradición de cuadraturas y anticuadraturas y logró generalizar los resultados, los cuales consignó en algunas tablas. Newton relacionó estos problemas con elementos físicos que dependen del tiempo. Imaginó una curva como un punto moviéndose en el espacio, y los problemas relacionados con cuadraturas y anticuadraturas, con la velocidad con la cual los puntos se mueven. Un punto que describe un movimiento en el espacio, le llamó *fluente*, y a la velocidad de la fluente con respecto al tiempo, la llamó *fluxión*. En su libro *De Methodis*, Newton resuelve varios problemas que son pilares en el desarrollo del cálculo (incluso, en los currículos modernos!): Dada una fluente (función), encuentra su fluxión (derivada); dada la fluxión, encontrar la fluente. También habla de cuadraturas de curvas. El maestro de Newton, Isaac Barrow, fue el primero en reconocer la relación inversa entre cuadratura y anticuadratura, que fueron las primeras aportaciones del Teorema Fundamental del Cálculo. Un problema importante de los desarrollos de Newton, fue la relación de estos resultados matemáticos con la dependencia del tiempo y el uso conveniente de ciertas cantidades que se podrían anular (porque tienden a cero), pero podría ser dividido porque ellas eran diferentes de cero. Esta idea actualmente no tiene problema porque sabemos que la palabra "tiende" tiene un enfoque explícito, y está amparada bajo el concepto de límite; pero en su tiempo, Newton no tenía los elementos necesarios que le permitiera fundamentar estos resultados, los cuales fueron criticados fuertemente por el Obispo Berkeley[3]. Otro problema era que el uso de la notación de Newton era bastante tediosa: la derivada la denotaba como $\dot{x}$, la segunda derivada como $\ddot{x}$, la tercera $\dddot{x}$, y así sucesivamente. Leibniz de manera independiente, aportó con la adecuada notación que compila toda la esencia de lo que es la integral, la cual ha resistido el paso de la historia: $\int$.

La emergencia de la integral

En el siglo XIX, hay un cambio significativo – ontológico - del concepto de integral. Los matemáticos se dan cuenta de que la integral no es un problema secundario del cálculo, como tal vez sucedió con Newton y Leibniz.

Bernoulli: el nacimiento de la integral

En una nota histórica de 1692, los Bernoulli (aunque la memoria tiene el nombre de Johann, muchos historiadores señalan el hecho de que Jakob tiene mucho de la paternidad del concepto) resuelven el problema de la isócrona y la catenaria, e introducen la palabra integral por primera vez. La idea de integración aparece como una herramienta para resolver algunas ecuaciones diferenciales, y con esta idea es como los Bernoulli resuelven estos problemas. Tal como es mencionado por Recalde, es un hecho epistemológicamente significativo, ya que "con la incorporación de un nombre para designar una operación específica, se identifica una noción que amerita un tratamiento especial" (Recalde, 2007, pág. 113). Los matemáticos han reconocido que la integral merece un adecuado tratamiento, y no es simplemente un aspecto secundario del Cálculo.

Para Leibniz, la integral tiene un sentido particularmente geométrico, donde la operación consiste en la suma de rectángulo infinitamente pequeños ydx, que podrían ser simbolizados como $\int ydx$. Posteriormente, en (Bernoulli, 1691) se reconoce la integral como la inversa del diferencial:

> *¿Qué es $\int Xdx$?*
>
> *Se ha visto antes cómo encontrar diferenciales de cantidades: ahora, al revés, vamos a mostrar cómo encontrar las integrales de los diferenciales, es decir, las cantidades de las que son las diferencias.*
>
> *Es decir, $\int ydx = P$ significaría $dP = ydx$.* (Bernoulli, 1691)

La representación en Series de Fourier

Fourier en su investigación acerca de la conducción del calor en un cuerpo sólido, mostró que este problema responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t} \tag{17}$$

Obteniendo una función trigonométrica como solución de esta ecuación diferencial:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ , con } n \in [0,2\pi] \tag{18}$$

en donde los coeficientes de Fourier son determinados de la siguiente manera,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx. \tag{19}$$

Esto significa que la representación de una función en series de Fourier está sujeta a la existencia de las

[3]George Berkeley (1685 - 1753), también conocido como el obispo Berkeley, fue un filósofo irlandés muy influyente cuyo principal logro fue el desarrollo de la filosofía conocida como idealismo subjetivo. En 1734 publicó El analista, una crítica a los fundamentos de la ciencia, que fue muy influyente en el desarrollo de la matemática.

integrales mencionadas en su intervalo correspondiente. El hecho de que los coeficientes de Fourier sean calculados como integrales definidas implica definir la integral para funciones arbitrarias. La emergencia de funciones de este tipo superó en cierto modo la concepción de función dada por Euler como una *expresión analítica*. Considerar la integral como antiderivada no tenía mucho sentido cuando se hablaba de funciones discontinuas, motivó a reconsiderar el concepto de integral. Problemas tales como «continuidad», «discontinuidad», «discontigüidad», etc., hicieron pensar que el problema pedía un retorno a la geometría. Fourier identificó la integral como un área, plantearon la necesidad de volver a la interpretación geométrica de la integral.

Esta concepción marca un hecho importante en la Historia de la Integral, ya que Fourier introdujo una notación la cual fue adoptada universalmente para las integrales definidas. Queda la siguiente pregunta en Fourier: ¿Cómo definir $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, como un área, cuando f es arbitraria?

La integral de Cauchy

La comprensión de Cauchy es un punto de llegada en la maduración del Análisis Matemático, tal como lo entendemos hoy en día. En 1821 él escribió un libro trascendental en la historia de las matemáticas llamada *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. 1st Partie. Analyze Algebrique*. Después de todas las discusiones acerca del problema de la conducción del calor, la cuerda vibrante, etc., se ha mostrado que la definición de función dada por Euler como una expresión analítica tiene ciertas limitaciones. En este sentido, Cauchy aporta una definición de función bajo un concepto que ha sido de gran trascendencia y que durante 25 siglos fue evadido dada la falta de elementos matemáticos para su comprensión. Esta definición significó la formalización de los procesos potencialmente infinitos: *el paso al límite*. Bajo el concepto de límite, define lo que es cantidad variable, función, continuidad, convergencia, etc. Define la derivada y la integral como un límite particular.

Un aspecto importante en las definiciones de Cauchy es la ausencia de soportes geométricos (ni siquiera con fines aclaratorios), pero todo esto está soportado bajo el concepto de límite y el álgebra de desigualdades: *Cuando los valores que toma una variable particular se acercan indefinidamente a un valor fijo, por lo que sólo se diferencian de él tan poco como desee, entonces este último valor, se le llama el límite de todos los anteriores* (Cauchy, 1821), que posteriormente utilizó una notación propia de Weierstrass, corresponde de manera moderna a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon) \tag{20}$$

Esta definición desconoce los problemas de los procesos infinitos cuya existencia está asegurada en el álgebra de desigualdades.

En la línea de desarrollo de la integral, es un punto de llegada, donde tenemos el concepto de integral en su forma refinada, como una noción de las matemáticas, basada en el concepto de límite. En términos generales, la integral es la generalización de un límite de sumas infinitamente pequeñas. Por lo tanto, Cauchy da la definición de integral y lo hace para funciones continuas, así:

Definición 1. (Integral de Cauchy) *Sea una función $y = f(x)$, definida en el intervalo $[x_o, X]$. Sea la partición $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = X$, se define la sucesión de diferencias, $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$, y la suma:*

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}).$$

El valor de S_n depende de n, y de

$$\text{máx}\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}\} = \|P\| \tag{21}$$

En caso de que el límite S_n exista cuando n tiende a infinito y cuando $\|P\|$ tiende a cero, entonces este límite se denomina:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx \tag{22}$$

La integral después de Cauchy

Las obras de Cauchy constituyen una importante ruptura conceptual, donde los referentes geométricos son exiliados y sólo se basa en el lenguaje analítico, definiendo la integral como un concepto puramente del Análisis. Pero a pesar de esto, no ignora su interpretación geométrica como el área bajo la curva como una aplicación de la integral definida. Pero la respuesta de Cauchy va más allá, mostró que una integral puede existir, pero no necesariamente indica cómo se calcula; es decir, ha demostrado que su forma de definir la integral definida no depende necesariamente de la existencia de la antiderivada. Ahora, en la perspectiva de Fourier y Cauchy surge otra pregunta: ¿Se puede definir $\int_a^b f(x)dx$ para *cualquier* sucesión de ordenadas? El matemático alemán Gustav Dirichlet dio respuesta negativa a esta pregunta con el siguiente contraejemplo:

$$\mathcal{K}(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ d, & \text{si } x \in \mathbb{Q}' \end{cases} \tag{23}$$

donde la integral no tendría ningún significado y donde $\int_a^b \mathcal{K}(x)$ no tiene un cierto valor. Así pues, la integral de Cauchy no es suficiente para abarcar esas *funciones arbitrarias* de las cuales habló Fourier. Sin embargo, Dirichlet propuso una salida a su propio problema. A pesar de que su función característica $\mathcal{K}(x)$ es densamente discontinua, podría ser que las funciones que eran integrables eran aquellas en las que sus puntos de discontinuidad podían determinarse de cierta manera.

Es decir, la definición de Cauchy abarca aquellas funciones continuas y discontinuas, pero con un número finito de discontinuidades. Dirichlet dice que no sólo serían aquellas funciones que tienen discontinuidades finitas, sino que podrían ser infinitas, siempre y cuando formaran un conjunto diseminado (denso en ninguna parte), y así $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ exista. Esta afirmación se conoce como la condición de Dirichlet.

La integral de Riemann

La preocupación de Dirichlet por la integración de funciones discontinuas fue retomada por su brillante discípulo Bernhard Riemann en su *Habilitationsschrift* en 1854. Riemann extendió la definición de integral de Cauchy reconociendo que la condición de continuidad no era esencial.

Definición 2. (Integral de Riemann). *Una función f definida y acotada en un intervalo $[a,b]$ es integrable si la suma*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{24}$$

va tendiendo a un único valor límite cuando los $x_i - x_{i-1}$ tienden a cero, donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ese valor límite va a ser, por definición, $\int_a^b f(x)dx$.

Expuso dos condiciones necesarias y suficientes sobre integrabilidad que son equivalentes:

(R1) La función f es integrable en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\sigma > 0$, $\exists\delta > 0$, tal que para toda partición P, con $\|P\| < \delta$, se tiene que $S(P,\sigma) < \varepsilon$, donde $S(P,\sigma) = \sum_{i\in T} \Delta x_i$, con $T = \{i: D_i > \sigma\}$.

(R2) f es integrable en un intervalo $[a,b]$ si y sólo si, para toda partición P, se tiene que, $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} D_i \Delta x_i = 0$, donde $D_i =$ oscilación de f en $[x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n$.

Con esto, Riemann pudo demostrar que la condición de Dirichlet no era necesaria, porque podía ser mucho más discontinua que lo que su maestro había imaginado. Riemann en su tesis doctoral de 1854 mostró ejemplos con los que demostró que su definición de integral acogía un conjunto de funciones más amplias que las de Cauchy. Pero, aun así, con la definición de integral dada por Riemann, no es posible integrar la función de Dirichlet. Por otra parte, el matemático italiano Ulise Dini demostró que la integral de Riemann tenía defectos, puesto que no se preserva bajo el paso al límite. Los detalles de esta demostración se pueden ver en (Grattan-Guiness, 1982, pág. 159).

La integral de Lebesgue

En busca de otra dirección, a finales del siglo XIX, la teoría de la integración de Riemann se orientaba hacia el estudio de los conjuntos y sus medidas. A finales del siglo XIX, hubo una gran confusión topológica con respecto a la medida de los conjuntos. Hubo resultados que no eran del todo correctos, como las condiciones de Hankel y Lipschitz para la medida de conjuntos. Esta confusión topológica era comprensible: la teoría de conjuntos surgió de manera seria e independiente. El punto de culminación fue la teoría de integración de Lebesgue, donde tomó algunos elementos conceptuales de Jordan y Borel en la formulación de la teoría de la medida.

Con todos estos insumos obtenidos hasta ahora, y a través de 25 siglos de desarrollo matemático, se ha querido formalizar el problema de las cuadraturas. Además, Lebesgue en su tesis doctoral, desarrolla la teoría de la medida y reconoce que para resolver los problemas que el formalismo analítico se ha visto limitado, debe volver al problema principal y milenario de las cuadraturas: un aspecto geométrico. Reconoce que las bases conceptuales de la teoría de la medida se basan en tres características fundamentales:

i. Existencia de un conjunto cuya medida sea diferente de cero.
ii. La medida es invariante bajo traslaciones
iii. La medida de una unión finita o numerable de conjuntos, disjuntos dos a dos, es igual a la suma de las medidas de los conjuntos.

Lebesgue comprende que para resolver los problemas actuales de la medida debe retornar a las bases conceptuales que están en las raíces de los conceptos matemáticos desde sus inicios. En su tesis doctoral reconoce que debe volver a leer a Euclides y Arquímedes, y así darse cuenta de que la respuesta se encontraba allí, cambió el concepto de medida relativa al de medida absoluta, en consecuencia, Lebesgue define la integral como sigue:

Definición 3. (Integral de Lebesgue). *Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$, tal que:*

1. *Existen m y M, tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$*
2. *Para todo c, d entre m y M, el conjunto $\{c \leq f \leq d\}$ es medible*

Se toma una partición P de $[m,M]$, $P = \{y_0 = m, y_1, \dots, y_n = M\}$ y se definen los conjuntos $e_i = \{x \in [a,b]: f(x) = y_i\}$, para $i = 1,2, \dots n$ y $e_i' = \{x \in [a,b]: y_i < f(x) < y_{i+1}\}$, para $i = 1,2, \dots n-1$, los cuales son medibles. Sean las sumas,

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} y_i m(e_i) + \sum_{i=0}^{n} y_i m(e_i') \qquad (25)$$

$$\delta_n = \sum_{i=0}^{n} y_i m(e_i) + \sum_{i=0}^{n} y_{i+1} m(e_i')$$

Entonces f es de carácter Lebesgue-Integrable si cuando n tiende a infinito y $y_i - y_{i-1}$ tiende a cero (es decir, la norma de la partición tiende a cero: $\|P\| \to 0$) las dos sumas coinciden; en este caso se escribe,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} \delta_n \qquad (26)$$

Por lo tanto, Lebesgue muestra que, en efecto, es una generalización de la integral de Riemann, ya que toda función R-Integrable es L-Integrable.

Una posible clasificación desde un punto de vista epistemológico del concepto La evolución de los conceptos matemáticos juega un papel central en la Epistemología, y para los investigadores en educación matemática es importante reconocer el tránsito histórico-epistemológico-ontológico de un concepto matemático. Una visión de este tipo, proporciona herramientas pedagógicas y conceptuales tanto para los educadores matemáticos como para los mismos matemáticos; con el propósito de lograr una mayor comprensión de los diferentes conceptos que subyacen a las estructuras matemáticas hasta el momento emergidas en el transcurso de la construcción de esta disciplina desde sus inicios.

En el marco teórico propuesto en (Sfard, 1991) se resaltan las etapas a través de las cuales un concepto pasa de su versión de herramienta a su versión de noción formal: interiorización, condensación y cosificación, es así como se puede apreciar en esta teoría un esfuerzo por aclarar cada una estas categorías epistemológicas que tratan de explicar, a través de la historia, los distintos enfoques con los que ha venido construyendo y al ampliar la construcción del conocimiento matemático.

La idea de Sfard va de la mano con la idea que promulga Piaget, donde se reconoce que los conceptos nacen de las acciones y necesidades que todos los seres humanos tenemos (Piaget, 1970). Las personas primero necesitaron contar y medir; para contar, utilizaron representaciones numéricas; para medir, comparaban; por lo tanto, el problema de las cuadraturas desató una gran cantidad de ideas hasta llegar a su generalidad: la integral matemática. La figura 7 pretende mostrar ese desarrollo de la integral que estuvo latente al desarrollo del concepto de función, donde se parcela en los tres estadios propuestos en (Sfard, 1991)

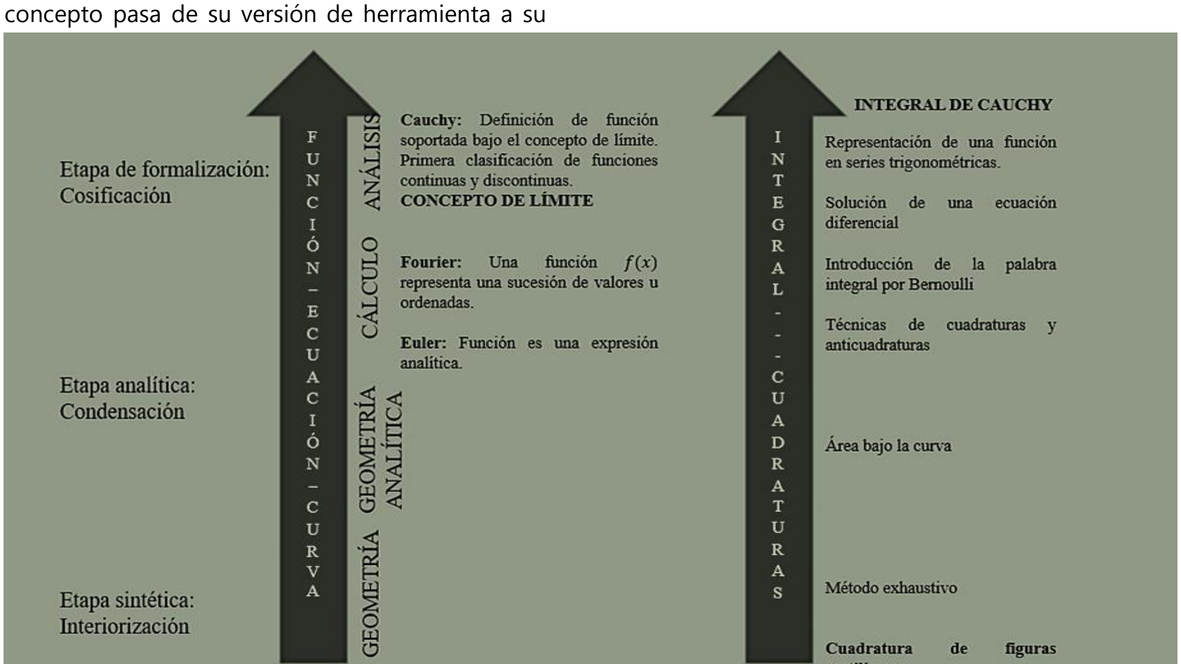

Figura 7: De las cuadraturas a la integral de Cauchy. Fuente: Tomado de Moran (2014), sin publicar.

Resultados

Consideraciones sobre una etapa superestructural de la integral

Luego de analizar estos tres estadios en los que el concepto de medida ha pasado, del problema de la medida de magnitudes geométricas (en particular, el caso de las cuadraturas) a formalizarse en un concepto matemático llamado integral; se puede hablar de la constitución histórica de este concepto, que permite por lo tanto, hacer reflexiones didácticas sobre la enseñanza de estos conceptos, al entender que no fue algo que ocurrió en un corto periodo de tiempo, sino que hubo grandes dificultades que se superaron para lograr construir el concepto de integral.

La forma de abordar la enseñanza del concepto también nos puede aportar elemento sobre cómo construirlo desde distintas perspectivas o posturas epistemológicas. Cauchy ha definido analíticamente la integral para funciones continuas y funciones concierto tipo de discontinuidades. Una primera generalización se da a través de la integral de Riemann, sin embargo, tiene muchas limitaciones y contenía problemas de consistencia. En 1902, Lebesgue se da cuenta que el problema de medir radica en las raíces de la medida misma y cambia el concepto de medida relativa de los antiguos matemáticos al de medida absoluta. Para ello, vuelve a leer Euclides y Arquímedes, dándose cuenta de que aquí está la respuesta para dar consistencia al nuevo concepto de integral (Romero, y Batallanos, 2016). Lo olvidado es nuevo, y las teorías matemáticas no suelen ser construidas por un solo matemático; sino que lleva sobre sus hombros un conglomerado de conceptos que han sido construidos a través de muchos siglos, tiempos, creencias, concepciones y filosofías, en el transcurso del tiempo, buscó cada vez más, contundencia en las teorías matemáticas nuevas.

Es cierto que la integral alcanza su condición de noción matemática, pero la integral no está en su forma acabada como concepto, es decir, como una entidad consificada sí, pero no en su etapa completamente estructural. En otras palabras, la integral tal como se define, está en una fase avanzada, pero su definición no cubre un espectro completo terminado de funciones a integrar. Cauchy lo hace para funciones continuas, pero su definición se vuelve muy limitada para funciones densamente discontinuas.

La integral de Riemann redefinida mostró que era superior a la de Cauchy e integraba funciones densamente discontinuas, pero, aun así, él no logró integrar la función de Dirichlet (característica de los irracionales). Después de los resultados del italiano Ulise Dini, se demostró que la integral de Riemann tiene defectos, ya que la integral de Riemann no se preserva bajo el paso al límite.

Estos problemas se resolvieron mediante la definición de la integral bajo una teoría de la medida, cuestión tratada por Lebesgue en su tesis doctoral de 1902, pero posteriormente se discutió la relación del axioma de elección con los conjuntos no Lebesgue-medibles. Los desarrollos subsecuentes de la integral han sido varios: La *integral de Riemann-Stieltjes*, que es una extensión de la integral de Riemann; *la integral de Lebesgue-Stieltjes*, desarrollada por Johann Radón, que generaliza las integrales de Riemann-Stieltjes y de Lebesgue; la *integral de Daniell*, que incluye la integral de Lebesgue y la integral de Lebesgue-Stieltjes sin tener que depender de ninguna medida; *la integral de Henstock-Kurzweil*, definida de forma variada por Arnaud Denjoy, Oskar Perron y Jaroslav Kurzweil, y desarrollada por Ralph Henstock; la *integral de Haar*, que es la integral de Lebesgue con la medida de Haar; la *integral de McShane*; la *integral de Bochner* que extiende la integral de Lebesgue a espacios de Banach; la *integral de Itō*, integral que extiende a la integral de Riemann-Stieltjes, permite integrar respecto a procesos estocásticos que pueden no ser de variación acotada como el movimiento browniano, etc. que son desarrollos que se corresponden a la gran proliferación de las matemáticas en el siglo XX.

En el contexto epistemológico, la pregunta permanecería abierta: después de tantos desarrollos de la integral, en ciertos espacios y medidas, y sus innumerables aplicaciones a la Física, y a la Ingeniería, *¿qué es la integral?* En este sentido, se propone hablar de una nueva etapa en la constitución de la integral como una noción matemática: la etapa superestructural de la integral.

Definición 4. (Etapa superestructural de una noción matemática). *Se dice que un objeto está en su etapa superestructural cuando sus representaciones y/o aplicaciones responden a ciertas relaciones invariantes en su noción propia.*

En los desarrollos de las matemáticas clásicas, tenemos que el álgebra y el análisis son las ramas significativas de la época. Nótese el articulo determinado "el", que hace referencia a la unicidad de la rama. Si avanzamos en la época y ya hablamos de matemáticas modernas, ya tendríamos que hablar de teoría de conjuntos y lógica(s) matemática, teoría analítica y algebraica de números, algebras abstractas, geometría algebraica, funciones de variable compleja, medida e integración, topología general y algebraica, análisis funcional, teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, entre otras.

Con tantas ramas de las matemáticas, mucho creen, como es mencionado por (Zalamea, 2009, pág. 21), "sus tipos de objeto y de métodos se mantienen invariables". Esto no deja más que de ser una creencia, ya que la ontología y epistemología de los objetos de las matemáticas modernas no son exactamente iguales.

Es mucho lo que podría hablarse sobre esta idea, de polemizarla, desde una postura aristotélica del asunto, en donde el método hipotético-deductivo esté inmerso en la forma de hacer matemáticas y que los objetos siguen siendo los mismos y, de ser cierta esta afirmación, rápidamente nos centra la atención en las dificultades que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este conocimiento.

Además, surge preguntas tales como, ¿si los métodos son los mismos, y la ontología/epistemología de ellos es invariante, por qué las matemáticas presentan dificultad para su comprensión? Esta pregunta abierta, puede verse en cierto sentido como una explicación a los modos de concebir las matemáticas y de reflexionar sobre su enseñanza y su aprendizaje, teniendo en cuenta su aspecto formal.

Al hablar de medida e integración, el gran salto de comprensión del problema de la medida se ve en Lebesgue, cuando por medio de una rotación del plano cartesiano, logra ver lo que los demás no pudieron percibir y resuelve un problema de más de 2500 años. Hoy día, se propone una forma de concebir las matemáticas en su forma estructural que permite entender las formas y los métodos comunes a algunas ramas de las matemáticas.

Como (Zalamea, 2009) menciona:

> *"La eclosión y la génesis de las estructuras matemáticas, vedadas en una estática aproximación analítica, resultan más visibles desde una perspectiva dinámica en la que un problema, un concepto o una construcción se transforman mediante las soluciones parciales del problema, las definiciones acotadas del concepto o el haz de saturaciones y decantamientos de la construcción*. (Zalamea, 2009, pág. 27)

Los estructuralismos nos permiten vislumbrar esta dinámica y coherente posición en la forma de hacer matemáticas, donde se razona los aspectos asociados a los conceptos que son comunes a todas sus ramas y permite articularlas para lograr una mayor comprensión de las mismas de manera integrada.

En cuanto a la integral, hasta el presente, hay dos aspectos relevantes, transversales a todos los desarrollos de la integral:

- Linealidad
- Teoremas límites

Esos dos aspectos son lo *uno detrás de lo múltiple* en el caso de la integral, y que constituye un buen asidero en la etapa de superestructuralización de la integral como noción matemática, en donde todos los desarrollos posteriores se corresponden con variaciones que guardaron en esencia estas dos propiedades. La presente gráfica pretende ilustrar la extensión a la etapa de superestructuración

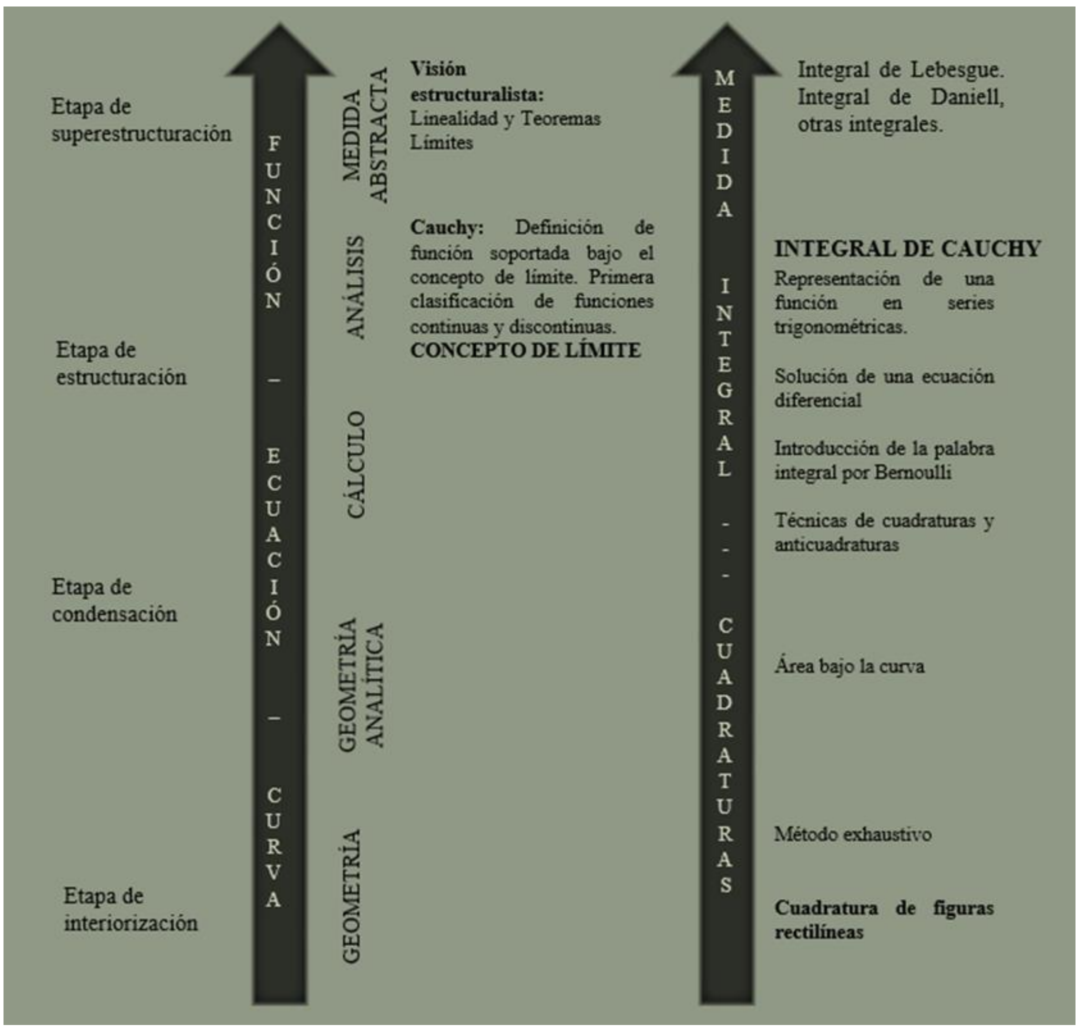

Figura 7: Etapa superestructural de la integral. Tomado de (Moran, 2014), sin publicar.

Se puede asumir que la visión estructuralista permite una mejor aprehensión y comprensión de las matemáticas (contemporáneas). Por lo tanto, la pregunta que surge es: ¿Si se logra establecer un nivel alto de comprensión en conocimientos matemáticos avanzados, no será un elemento fundamental para abordar los problemas actuales de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas elementales? En algunos programas universitarios se puede apreciar que se continuado impartiendo cursos de Análisis y Topología igual que hace más de 60 años, entonces ¿qué es lo que ocurre con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas contemporáneas?, o al parecer entonces ¿hay currículos totalmente diferentes? De acuerdo con (Zalamea, 2009), "existe una incapacidad profesional para observar las nuevas técnicas en juego*"*.

Por lo tanto, estas reflexiones nos llevan a pensar que es necesario una transformación en procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que es necesario una cualificación en el desarrollo profesional de los educadores matemáticos, transformó su formación y visión hacia unas nuevas perspectivas, ya que son quienes terminan siendo los protagonistas directos del desarrollo actual y futuro de las matemáticas que se imparten en la escuela. Se necesita una buena formación matemática de parte de los profesores que permita poder entrever qué es ese *uno* (como convergencia de métodos) que está detrás de lo *múltiple* (como ramas prolíficas de las matemáticas) para unos niveles más amplios de compresión.

Agradecimientos

A Luis C. Recalde, por haber puesto la semilla. Al proyecto por parte del CONACYT en México y a la Universidad Autónoma de Guerrero. Así mismo al grupo EDUMATH de la Universidad de Antioquia por su apoyo transversal en la elaboración de la investigación.

Referencias Bibliográficas

Bernoulli, J. (1691). Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium. Johannis Bernoulli Opera Omnia, 385-558.

Bobadilla, M. (2012). Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. Tesis doctoral. Cali: Universidad del Valle.

Caraballo, R. M., Rico, L., & Lupiáñez, J. L. (2013). Conceptual changes within the theoretical framework of PISA: The case of mathematics. [Cambios conceptuales en el marco teórico competencial de PISA: El caso de las matemáticas] Profesorado, 17(2), 225-241

Cauchy, A. L. (1821). Cours d'analyse de l'ecole royale polytechnique. París: de Bure.

Dhombres, J. (1980). Mesure et continu. Nantes: CEDIC.

Edwards, J. T. (1982). The historical development of the calculus. New York: Springer-Verlag.

Grattan-Guiness, I. (1982). From the calculus to set theory 1630-1910. Madrid: Alianza.

Hawkins, T. (1970). Lebesgue's theory of integration. New York: Chelsea Publishing Company.

Lesh, R., & Landau, M. (1983). Adquisition of Mathematical Concepts and Processes. New York: Academic Press.

Londoño, R. (2011). La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Medellín: Universidad de Antioquia.

Michel, A. (1992). Constitution de la théorie moderne de l'intégration. París: Librairie philosophique J. Vrin.

Moran, D. S. (2014). De la integral como herramienta a la integral como noción formal. De las cuadraturas a la integral de Cauchy. Tesis de licenciatura. Cali: Universidad del Valle.

Piaget, J. (1970). Genetic Epistemology. New York: W. W. Norton.

Pier, J. P. (1996). Histoire de l'intégration. París: Masson S.A.

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. Matemáticas: enseñanza universitaria, 103-127.

Romero, J. G., & Batallanos, V. A. Q. (2016). Consent with the other in the interpretation of mathematical understanding. [El Consentimiento con el Otro en la Interpretación de la Comprensión en Matemáticas] Bolema - Mathematics Education Bulletin, 30(55), 625-648. doi:10.1590/1980-4415v30n55a16

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection, processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematicas 22, 1-36.

Skemp, R. (1971). The psichology of learning mathematics. England: Penguin books.

Zalamea, F. (2009). Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.