El conocimiento semántico en la representación de problemas de ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos *

The semantic knowledge in the representation of problems of linear differential equations as mathematical models*.

O conhecimento semântico na representação de problemas de ecuaciones diferenciais como modelos matemáticos*

Rosa Virginia Hernández **
Luis Fernando Mariño***
Mawency Vergel Ortega****

Universidad Francisco de Paula Santander

Fecha de recepción del artículo: 4 de Septiembre de 2016
Fecha de aceptación del artículo: 1 de Diciembre de 2016
DOI: http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v7i3.523

* El artículo es resultado de la investigación "conocimiento semántico en la representación de problemas de ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos financiado por el Fondo de investigación universitaria FINU, Universidad Francisco de Paula Santander"

** Magister en Matemáticas mención Educación Matemática. Filiación: Universidad Francisco de Paula Santander. Email: rosavirginia@ufps.edu.co. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2638-671X

*** Magister en Matemáticas mención Educación Matemática. Filiación: Universidad Francisco de paula Santander. Email: fernandoml@ufps.edu.co. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3438-6963

**** Magister en Matemáticas mención Educación Matemática. Filiación: Universidad Francisco de paula Santander. Email: mawency@ufps.edu.co. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8285-2968

Resumen

En este artículo se presenta la caracterización del conocimiento semántico evidenciado por un grupo de estudiantes en la representación externa a problemas de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden como modelos matemáticos. El trabajo fue cuantitativo de tipo exploratorio y descriptivo utilizando un cuestionario en la recolección de información. El soporte teórico que dio sentido al estudio fue el modelo de dos etapas propuesto por Mayer R. para la resolución de problemas matemáticos, el ciclo de modelación bajo la perspectiva cognitiva según Borromeo Ferri y la teoría de las representaciones de Goldin y Kaput. La investigación se centró específicamente en la fase de representación del modelo. Entre los principales hallazgos se destaca que cada participante hace su propia representación externa a conceptos como: sistema masa-resorte, peso, masa, punto de equilibrio, constante de elasticidad, punto de equilibrio, ley de Hooke, fuerza amortiguadora, fuerza externa, ley de Newton, entre otros. Se evidencian también dificultades en el tránsito del lenguaje natural al lenguaje matemático y la representación externa de cada una de los signos, símbolos o expresiones matemáticas inmersas en el problema de palabra, debido a que el resolutor tiene que construir un modelo mental de la situación real y plasmarlo en un modelo matemático. Lo anterior pone de manifiesto la importancia que tiene el conocimiento semántico en la etapa de traducción cuando se intentan resolver problemas como situaciones reales a modelar.

Palabras clave: resolución de problemas, ciclos de modelación, problemas de palabra, representaciones externas, conocimiento extra matemático, modelación matemática.

Abstract

This article presents the characterization of the semantic knowledge evidenced by a group of students in the external representation to problems of second order linear differential equations as mathematical models. The work was quantitative exploratory and descriptive using a questionnaire in the collection of information. The theoretical support that gave meaning to the study was the two-stage model proposed by Mayer R. for solving mathematical problems, the modeling cycle under the cognitive perspective according to Borromeo Ferri and the theory of representations of Goldin and Kaput. The research focused specifically on the representation phase of the model. Among the main findings is that each participant makes his own external representation to concepts such as: mass-spring system, weight, mass, equilibrium point, constant of elasticity, equilibrium point, Hooke's law, damping force, external force, law of Newton, among others. Difficulties are also evident in the transition from natural language to mathematical language and the external representation of each of the signs, symbols or mathematical expressions involved in the word problem, because the resolver has to construct a mental model of the real situation and translate it into a mathematical model. This demonstrates the importance of semantic knowledge in the translation stage when trying to solve problems as real situations to be modeled

Keywords: problem solving, modeling cycles, word problems, external representations, extra mathematical knowledge, mathematical modeling.

Resumo

Este artigo apresenta a caracterização do conhecimento semântico evidenciado por um grupo de estudantes na representação externa a problemas de equações diferenciais lineares de segunda ordem como modelos matemáticos. O trabalho foi quantitativo exploratório e descritivo usando um questionário na coleta de informações. O suporte teórico que deu sentido ao estudo foi o modelo de dois estágios proposto por Mayer R. para resolver problemas matemáticos, o ciclo de modelagem sob a perspectiva cognitiva de acordo com Borromeo Ferri e a teoria das representações de Goldin e Kaput. A pesquisa focalizou especificamente a fase de representação do modelo. Entre os principais achados, cada participante faz sua própria representação externa para conceitos como: sistema de massa-mola, peso, massa, ponto de equilíbrio, constante de elasticidade, ponto de equilíbrio, lei de Hooke, força de amortecimento, força externa, lei de Newton, entre outros. As dificuldades também são evidentes na transição da linguagem natural para a linguagem matemática e a representação externa de cada um dos signos, símbolos ou expressões matemáticas envolvidas na palavra problema, porque o resolvedor tem que construir um modelo mental da situação real e traduzi-lo para um modelo matemático. Isso demonstra a importância do conhecimento semântico na fase de tradução ao tentar resolver problemas como situações reais a serem modeladas.

Palavras-chave: resolução de problemas, ciclos de modelagem, problemas de palavra, representação externa, conhecimento extra matemático, modelagem matemática

Introducción

Las matemáticas es considerada la base de procesos complejos de conocimiento, donde es necesario el pensamiento crítico, reflexivo y analítico (Vergel Ortega, Duarte, & Lozano, 2016); por lo tanto, la resolución de problemas matemáticos y la modelación matemática como estrategia de enseñanza requieren del tránsito por una serie de etapas o ciclos. Una fase crucial es la representación de la situación real o el texto que la describe. Quien intenta superar estas fases en algún momento debe construir una representación mental de las relaciones entre los diferentes elementos que describen el problema, representándola externamente mediante una función, ecuación, inecuación o expresión matemática que represente la situación. Para tener éxito en esta fase se debe tener claridad en el significado de las palabras, definiciones, teoremas, relaciones matemáticas, comprensión del lenguaje matemático técnico o no, signos, símbolos, sistemas de medidas e incluso conocimiento fuera de las matemáticas. En términos de (Dubinsky, 1991) "primero una acción debe ser interiorizada, permitiendo al sujeto estar consciente de esta acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones" (p. 107). Como lo afirman (Edmonds-Wathen, Trinick, & Durand-Guerrier, 2016), al examinar las cuestiones lingüísticas en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, se reconoce que "el uso del idioma en la escuela difiere en algunos aspectos importantes del uso de la lengua fuera de la escuela".

Las representaciones son un elemento central a la hora de aprender y pensar matemáticamente. Cuando se menciona a un grupo de estudiantes un objeto matemático o un procedimiento lo primero que viene a la mente es en una representación mental del objeto o proceso bajo consideración. Cada persona puede crear una o varias representaciones mentales concurrentes para el mismo concepto matemático u objeto. Por ejemplo el concepto de función es crucial en la enseñanza de la matemática y detrás de él yace una estructura compleja. Un estudiante lo puede ver como una fórmula, como un proceso de entrada y salida, como una tabla o un gráfico, etc. De igual manera mientras para el estudiante el concepto de integral puede ser un proceso de cálculo, para el profesor puede ser un objeto a ser transformado. Según (Dreyfus, 2002), "distintas representaciones mentales de un concepto pueden coexistir en la mente de alguien, y al ser aprovechadas pueden ser llamadas a considerar diferentes situaciones matemáticas" (p. 32).

"La mayoría de los alumnos tienen dificultades para entender el lenguaje de las matemáticas. El conocimiento inadecuado relacionado con el lenguaje matemático especializado que incluye palabras técnicas, no técnicas, y notación simbólica" (p. 2), (2015). Según (Sabbagh, 2008), la dificultad "parece ser la representación del problema; es decir, moverse de las palabras en el problema a una representación mental coherente con éste" (p. 218). Entre tanto para (Calle, 2013), el problema semántico del lenguaje matemático es muy complejo, debido a la diversidad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática, como: "el uso del lenguaje ordinario oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas de objetos materiales y un sinnúmero de signos" (p. 22).

Las posibles causas de las "dificultades en los procesos de modelación radica en las demandas cognitivas en las tareas, puesto que se encuentran ligadas a otras competencias como la lectura, la comunicación, el diseño y aplicación de estrategias para la resolución de problemas" (Blum & Borromeo Ferri, 2009). (Camarena, 2009), (Kashefi, Ismail, & Yusof, 2010), y (Hashemi, Abu, Kashefi, & Rahimi, 2014), parecen estar de acuerdo en que hay una relación directa entre los conocimientos matemáticos previos y el éxito en la traducción realizada. Si los signos y símbolos relacionados con el concepto de función, límites, continuidad y derivadas fueron mal aprendidos, tienen sus implicaciones en matemáticas superiores. Igualmente, se requieren que los docentes transmitan y definan el significado de objeto matemático en términos de prácticas en donde el significado matemático quede ligado a otro, permitiendo distinguir entre lo que interpretan los jóvenes como sentido y significado en un contexto de la matemática educativa (Zafra Tristanch, Vergel Ortega, & Martinez Lozano, 2014).

Investigadores del tema coinciden en muchos aspectos. Para (Berdugo Oviedo, 2004) la dificultad reside en el emparejamiento entre la comprensión del texto, la situación constituida en el texto y la representación matemática. Según (Wright, 2014) la mayor dificultad se encuentra en la fase de traducción del lenguaje humano al simbolismo matemático. (Haghverdi, y otros, 2012) y (Calle, 2013) revelan que los errores de los alumnos en la resolución de problemas son resultado de falta de conocimiento lingüístico, semántico, estructural y comunicacional, el empleo del proceso semántico y del lenguaje matemático es deficiente, no interpretan ni relacionan signos ya aprendidos con los nuevos, desconocen el proceso semántico del significado de las palabras. Para (Ilany & Margolin, 2010) en este proceso existe la necesidad de establecer un puente entre el lenguaje humano y el lenguaje matemático. Mientras que para (Sastre-Vazquez, Andrea, Villacampa, & Navarro-Gonzalez, 2013) los estudiantes universitarios de primer año no entienden los elementos básicos del lenguaje de las matemáticas y esto les lleva a realizar numerosos errores de construcción e interpretación.

Los ingenieros utilizan la matemática para resolver problemas. La ingeniería necesita de la matemática para lograr sus propios fines ya que permite dar solución a problemas provenientes de la industria o del diario vivir, reconocidos como procesos de modelación (Guerrero, 2012). Los programas académicos para la formación de ingenieros se caracterizan por tener un amplio componente de matemáticas especialmente en el ciclo básico. Ecuaciones diferenciales es una de las asignaturas que más aporta en la formación del ingeniero, específicamente en procesos dinámicos de modelación, pero también quizá una de las que más dificultad les presenta. Al plantear situaciones que involucran conceptos de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden ya sea para desarrollar contenidos o como actividades de valoración los resultados son desalentadores, específicamente en la representación del modelo matemático. Cuando el estudiante se enfrenta a éste tipo de problemas debe poner en juego, conceptos, habilidades y procedimientos provenientes del cálculo diferencial, integral, álgebra lineal, lo visto en el nivel educativo precedente e incluso otros modelos matemáticos y conocimiento fuera de las matemáticas. Como lo afirma (Toro, 2009), "comparativamente con otras áreas, las matemáticas presentan una característica particular: son un conocimiento acumulativo" (p. 7). El éxito en la traducción de enunciados para representar matemáticamente la situación depende de habilidades verbales, conocimientos matemáticos y otras disciplinas involucradas en la situación.

La resolución de problemas y la modelación matemática no van por caminos diferentes y deberían ser el eje central en la enseñanza de las matemáticas. Para Polya y Branca citados en (Muir, Beswick, & Williamson, 2008), (Intaros, Inprasitha, & Srisawadi, 2014) y el (NCTM, 2000) la resolución de problemas debería ser el foco central del currículo de matemáticas, ya que requiere de una variedad de habilidades que van desde la interpretación de información, planificación, trabajo metódico y comprobación utilizando diferentes estrategias. En contraste, para Anderson, Lovitt y Schoenfeld citados en (Muir, Beswick, & Williamson, 2008) hay poca evidencia, para afirmar que este enfoque está ocurriendo en las aulas de clase. Según (Goldin, 1998) sólo se hace hincapié en procedimientos y habilidades observables, restando importancia al desarrollo de estructuras internas conceptuales relacionadas con la comprensión matemática. Para (Rasmussen & Blumenfeld, 2007) la educación tradicional a nivel de pregrado no alienta a los estudiantes a crear estrategias y técnicas propias para resolver problemas. Por su parte Artigue y Yusof citados en (Moreno, 2005) afirman que "los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas a nivel universitario tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, que acaba siendo rutinaria" (p. 82).

Al momento de resolver un problema se debe transitar por la fase de traducción. Para (Mayer, 1986), esta etapa consiste en "leer, decodificar el texto del problema y luego la traducción de cada proposición en una representación mental de la memoria" (p. 409). Lo que para (Polya, 2005) sería comprender el problema. De acuerdo a (Madzorera, 2015) el conocimiento de los hechos entra en juego en esta etapa y el objetivo final en la comprensión de un problema "es construir un modelo de la situación, es decir, una representación mental de la situación que se describe en el problema" (p. 7). Según (Camarena, 2009), antes de formular el modelo matemático se requiere:

Tránsito entre los diferentes tipos de representación. En matemática se cuenta con los registros numérico, algebraico, analítico, contextual y visual, éste último incluye gráficas, diagramas, esquemas y dibujos (…), tránsito del lenguaje natural al matemático y viceversa. (p. 22).

Por la trascendencia de la fase de representación en el ciclo de modelación y la resolución de problemas, la investigación estuvo centrada específicamente en analizar el conocimiento semántico a ser matematizado cuando se presentan problemas de palabra como situación real en el marco de la teoría de (Mayer, 1986), el ciclo de modelación bajo la perspectiva cognitiva según Borromeo Ferri y la teoría de las representaciones de Goldin y Kaput. Para orientar la investigación se planteó el siguiente objetivo: Caracterizar el conocimiento semántico evidenciado por un grupo de estudiantes cuando representa problemas de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden como modelos matemáticos.

Conceptualización.

Tanto en la modelación matemática como en la resolución de problemas existen diferentes vertientes, tendencias y perspectivas (Kaiser & Sriraman, 2006).

Modelación matemática. Para algunos investigadores entre ellos (Romo-Vasquez, 2014) las matemáticas deben verse como disciplina de servicio. Los programas que no forman matemáticos puros, no deben basar la enseñanza en el rigor y la estructura propia de las matemáticas, sino potenciarla como herramienta para resolver de manera eficaz problemas de la vida práctica.

La modelación matemática en la enseñanza de las matemáticas se ha constituido en un campo de investigación desde hace más de 30 años. Organismos como: El ICMI (International Comission and Mathematical Instruction) tiene una sección afiliada dedicada específicamente a la modelación, el ICTMA (Internacional community of Teacher of modelling and applications), CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) incluye el grupo de trabajo Applications and modelling, el NTCM (National council of Teachers of Mathematics) con sus estándares concede importancia a la modelación como solución de problemas (NCTM, 2000).

De igual manera existen diferentes definiciones de educación matemática. Para (Blum & Borromeo Ferri, 2009): "la modelación matemática es el proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones" p. (50). Según (Bassanezi & Biembengut, 1997), la mayoría de autores cuando se refieren a la modelación matemática lo hacen como "el proceso que utiliza conceptos y técnicas esencialmente matemáticas, para el análisis de situaciones reales". Entre tanto para Schmidt la definición depende de los objetivos en el proceso de modelado y la naturaleza del contexto: "La modelación matemática en general se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos (p. 2067).

Ciclos de modelación. (Borromeo, 2006), presenta cuatro grupos de ciclos de modelación cada uno con sus fases respectivas, diferenciado entre: situación real (SR), situación modelo (SM), representación mental de la situación (RMS), modelo real (MR) y modelo matemático (MM). a) Grupo 1. Se centra en los procesos cognitivos de los individuos durante el proceso de modelación, distinguiendo entre SM, RMS y (MR), b) Grupo 2. Es un tipo mixto de SM/ RMS y MM, utiliza el análisis de la representación de los problemas, particularmente cuando se usa texto para presentar la información del problema o las instrucciones independiente de cómo el texto se formuló, allí coincide la fase de construcción de un modelo de situación con la fase de construcción del modelo real (Blum & Niss, 1991) Grupo 3. Los investigadores no distinguen entre MS/ RMS y MR por lo que el modelo de la situación no es una fase de éste ciclo de modelación y d) Grupo 4. Se combinan diferentes direcciones de modelado con algo en común, no existe fase entre la situación real y el modelo matemático.

En el ciclo propuesto por (Borromeo, 2006), la situación real se presenta mediante un problema de palabra, compuesto por una imagen, un texto o los dos. En la transición de la situación real a la representación mental de la situación, la persona entiende el problema haciendo una reconstrucción mental de la situación dada. La representación mental de la situación puede ser diferente dependiendo del pensamiento matemático de la persona, la imaginación visual en relación con asociaciones de experiencias propias o el enfoque; es más cuestión de números y hechos dados en el problema, que se deben combinar o relacionar. El modelo real tiene una conexión fuerte con la representación mental de la situación y es construido internamente por la persona y se plasma en representaciones externas mediante bocetos o fórmulas que en ocasiones puede representar un modelo real también.

Problemas matemáticos. El término problema tiene una variedad de significados. Para (Tobergte & Curtis, 2013) es "una situación que lleva consigo ciertas preguntas que desafían a alguien intelectualmente y no está en la inmediata posesión de métodos, procedimientos o algoritmos suficientes para responder las preguntas" (p. 38). Según Mayer tiene ciertas características: "Datos, objetivos y obstáculos" y en general cualquier definición, debería consistir en tres ideas: "1) el problema está actualmente en un estado, pero 2) se desea que esté en otro estado y 3) no hay una vía directa y obvia para realizar el cambio" (1986, p. 11). Desde el punto de vista de las matemáticas, la educación y la psicología tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr el objetivo (Polya, 2005). Para Okoń citado en (Dostál, 2015) es "una dificultad práctica o teórica que un alumno tiene que resolver de forma independiente por su propia investigación activa". Para (Tobergte & Curtis, 2013) en un problema matemático aplicado, la situación y las preguntas pertenecen al mundo real o "el resto del mundo fuera de las matemáticas" (p. 38) permitiendo que conceptos y métodos matemáticos se involucren. Por el contrario en un problema matemático puro la situación está inmersa en el universo matemático.

Resolución de problemas. Para Dumas-Carré, citado en (Perales, 1993), va desde la lectura del enunciado, haciendo una distinción entre el tratamiento lógico-matemático y la propia actividad de resolución analizada en términos de encadenamiento de procesos y la solución de dicha actividad. Para Gagné, Ashmores et al. citado en (Perales, 1993) hace referencia al proceso mediante el cual la situación incierta es clarificada e implica, en mayor o menor medida, la aplicación de conocimientos y procedimientos por parte del solucionador. Según (Parra, 2001), se refiere a la coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce, de allí que el resolutor formula el problema en sus propios términos, experimenta, observa, tantea, conjetura y valida. Para Lesh y Zawojewski, citados en (Santos, 2008) es el proceso de interpretar una situación matemáticamente, lo cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar, revisar interpretaciones, ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas. Según Schoenfeld, citado en (Pino, 2012), es el medio por el cual se aprende a pensar matemáticamente, y esto significa: (a) desarrollar un punto de vista matemático, la valoración de los procesos de matematización y abstracción y, tener la disposición de aplicarlos, y (b) desarrollo de competencias con las herramientas del oficio y uso de estas al servicio del objetivo de la comprensión de la estructura matemática con sentido.

La teoría de Mayer R. (1986). Para este autor quien intenta resolver un problema debe pasar por dos etapas o estadios: traducción y solución. Para la primera etapa se requiere conocimiento lingüístico (significado de las palabras inmersas en la situación), semántico (conocimiento de hechos del mundo real relacionados con la matemática) y esquemático. Para la segunda conocimiento operático y estratégico. La Figura 1 muestra estos procesos.

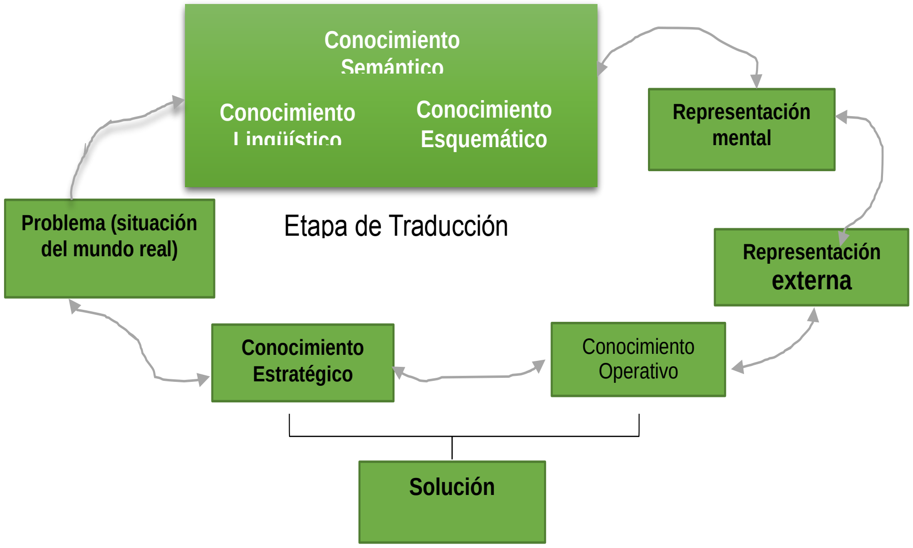

Figura 1. Tipos de conocimiento en la solución de problemas matemáticos. Mayer (1986). Fuente: Autores

Representaciones en matemáticas. (Goldin & Kaput, 1996) consideran que para la psicología del aprendizaje de la matemática es fundamental una perspectiva conjunta entre los sistemas internos y externos de representación. Utiliza el término representación interna para referirse a las posibles configuraciones mentales de los individuos como solucionadores de problemas; no observables por supuesto. En contraste aparece la representación externa refiriéndose a configuraciones observables tales como textos, gráficos, imágenes, ecuaciones o micro mundos informáticos, accesibles a la observación de cualquier persona con conocimientos adecuados. Considera de vital importancia las interacciones bidireccionales, a veces las personas internalizan mediante estructuras físicas externas de un sistema de notación, mediante la lectura e interpretación de palabras y frases, la interpretación de ecuaciones y gráficos y exteriorizan de forma física a través de actos derivados de las estructuras internas como escritura, habla o manipulación de elementos; estas dos formas de representación a menudo se producen simultáneamente. En el dominio de las matemáticas las representaciones pueden ser consideradas como abstracciones internas de las ideas matemáticas o esquemas cognitivos desarrollados por un alumno a través de la experiencia (Allexsaht-snider & Hart, 2001). Para Janvier y Morand citados en (Allexsaht-snider & Hart, 2001), las representaciones como números, ecuaciones, tablas, diagramas y gráficos son manifestaciones externas de los conceptos matemáticos que actúan sobre los sentidos como estímulos ayudando a entender los conceptos y la representación externa se refiere al acto de exteriorizar una abstracción mental interna.

Según (Pape & Tchoshanov, 2001):

Dentro del dominio de las matemáticas, las representaciones pueden ser pensadas como abstracciones internas de las ideas matemáticas o de los esquemas cognitivos que son desarrolladas por un aprendiz a través de la experiencia. Por otra parte, las representaciones tales como los números, las ecuaciones algebraicas, los gráficos, las tablas, los diagramas, y los caracteres son manifestaciones externas de los conceptos matemáticos que "actúan como estímulos en los sentidos" y nos ayudan a entender estos conceptos (Janvier, Girardon, & Morand, 1993, p.81). Por último, la representación también se refiere al acto de externalizar una abstracción interna, mental. (p.118).

Metodología

La investigación fue cuantitativa de tipo exploratorio descriptivo. Para recolectar la información fue elaborado un cuestionario de 17 reactivos, específico para el caso con preguntas de respuesta cerradas y abiertas, orientado por el conocimiento semántico que tiene que ser representado para posteriormente ser analizado en el software IBM SPSS Statistics 21.

La población estuvo conformada por 202 estudiantes que cursaron Ecuaciones Diferenciales en los programas de la Facultad Ingeniería de la Universidad Francisco de Paula Santander durante el II semestre académico 2016. Para la selección de los participantes se utilizó muestreo probabilístico. La muestra estuvo conformada por 133 participantes de los cuales el 45,1% son mujeres. El 76% obtuvo su grado de bachiller en los años 2013 y 2014. Las edades oscilan entre 17 y 30 años, con un promedio de 19,44 años. El 80.4% tiene edades entre 18 y 20 años. El 27,1% cursaba Ingeniería Industrial, 23,3% Ingeniería Civil, 6% Ingeniería Mecánica, 16,5% Ingeniería de Minas, 9% Ingeniería Electrónica, 3% Ingeniería Electromecánica, 13,5% Ingeniería de Sistemas y el 1,5% otros programas.

La situación a partir de cual se tomó el problema de palabra corresponde a sistemas masa-resorte que involucra el concepto de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, correspondientes al ciclo básico de ingeniería donde el estudiante debe representar este tipo de ecuaciones como modelos matemáticos. En el cuestionario cada opción de respuesta corresponde a una posible representación externa a la pregunta planteada. El siguiente problema de palabra fue tomado de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera de (Zill & Cullen, 2009), se realizaron algunas modificaciones, sirviendo como basa para la elaboración del cuestionario.

-Considere un resorte de longitud l sujetado con firmeza a un punto fijo (como el techo). Una masa que pesa 16 libras se fija en el extremo inferior del resorte y lo alarga 8⁄3 pie. La masa se libera inicialmente desde un punto 2 pies debajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 1⁄2 de la velocidad instantánea. Formule la ecuación diferencial que rige el movimiento del sistema masa-resorte si se aplica una fuerza externa igual a f(t)=10 cos3t.

Resultados

La información se presenta teniendo como fundamento el conocimiento semántico en la situación que debía ser representado. Tanto para elaboración del test como para la sistematización se hizo un análisis y síntesis de la información presentada en el problema como: signos, símbolos, definiciones y expresiones matemáticas inmersas en la situación.

Las Tablas 1 y 2 muestran la diversidad de representaciones externas que hace cada participante a conceptos como libra, pie, unidades de fuerza, unidades de masa y la correspondiente ecuación diferencial que modela la situación planteada, a partir de los ítems con respuesta cerrada.

Tabla 1. Representaciones externas a conceptos y expresiones matemáticas

Expresiones matemáticas	%	Representación Externa
El pie es la unidad de longitud en el sistema	36,8	De ingeniería y equivale a 30.48 cm en el sistema Cgs
	19,5	De ingeniería y equivale a 0. 3048 m en el sistema Mks
	17,3	De ingeniería equivalente a 30.48 cm en el sistema MKs
	26,3	Cgs y equivale a 12 pulgadas en el sistema de ingeniería
La libra es la unidad de fuerza en el sistema	23,3	De ingeniería
	18,8	Mks
	21,1	Mks, mientras en el sistema de ingeniería es el Newton

Expresiones matemáticas	%	Representación Externa
	36,8	De ingeniería, mientras en el sistema Mks es el Newton
La expresión **8/3** pies, es equivalente a	4,5	81.28 m, puesto que 1 pie equivale 30.48 cm
	29,3	32 pulgadas, ya que 1 pie equivale a 12 pulgadas
	53,4	81.28 cm, puesto que 1 pie equivale 30.48 cm
	12,8	0.8128 m, puesto que 1 pie equivale 30.48 cm
16 libras de masa equivalen a	8,3	$(1/2)slug$, calculada mediante $m = W/g$, donde W es el peso expresado en Newton y g la aceleración de la gravedad, además $1slug = N/pie/s^2$
	23,3	$(1/2)slug$, calculada mediante $m = W/g$, donde W es el peso expresado en libras y g la aceleración de la gravedad equivalente 32 pie/s^2
	27,8	$(1/2)slug$, calculada mediante $m = W/g$, donde W es el peso en unidades de fuerza y g la aceleración de la gravedad, de acuerdo al sistema de ingeniería
	40,6	$(1/2)slug$, calculada mediante $m = W/g$, puesto que el peso W se expresa en libras y la aceleración de la gravedad $g = 32\,pie/s^2$, en el sistema de ingeniería
La ecuación diferencial que modela la situación planteada es: (m es la masa, c la constante de amortiguamiento y k la constante del resorte	17,3	$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F_{externa}$
	28,6	$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} + 6y = 10cos3t$
	26,3	$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} + 6y = 10cos3t$
	27,8	$m\frac{d^2y}{dt^2} - c\frac{dy}{dt} + ky = F_{externa}$

Fuente: Autores

En la Tabla 2 se observan también las diferentes formas de interpretar expresiones como: punto de equilibrio, fuerza amortiguadora, constante de elasticidad, proporcionalidad, velocidad como razón de cambio entre otros. Conceptos que tienen que ser evocados por el estudiante, ya que debieron ser abordados en los curos precedentes.

Tabla 2. Representaciones externas a proposiciones y conceptos

Expresiones matemáticas	%	Representación Externa
Un sistema masa resorte está compuesto por	31,6	Una masa puntual, un resorte ideal colgante y un punto de sujeción del resorte, por ejemplo el techo
	17,3	Una masa m unida a un resorte ideal, que a la vez se halla unido a una pared
	33,8	Un resorte con alto coeficiente de elasticidad, una masa puntual y un punto de sujeción del resorte
	17,3	Un resorte con alto coeficiente de elasticidad que no se deforme en su rango de estiramiento, una masa puntual y un punto de sujeción del resorte
La masa de un cuerpo es	65,4	Una medida de la cantidad de materia que posee un cuerpo y su unidad en el sistema internacional de unidades es el kilogramo
	12,8	Una medida de la cantidad de materia que posee un cuerpo y su unidad en el sistema internacional de unidades es el gramo
	21,1	Una magnitud física que expresa la cantidad de materia que posee un cuerpo y su unidad en el sistema de ingeniería es el *slug*
	0,8	La inercia o resistencia a los cambios de estado de movimiento.

Expresiones matemáticas	%	Representación Externa
El peso de un cuerpo, representa	7,5	La Fuerza con la que tierra atrae al cuerpo
	15,0	Una fuerza dependiente de la intensidad del campo gravitatorio en el lugar del espacio ocupado por el cuerpo.
	7,5	Una fuerza y su unidad de medida es el Newton
	69,9	El producto de su masa por la aceleración de la gravedad, expresado mediante la relación $W = mg$
La constante de elasticidad del resorte, es	3,0	Una medida de la dureza del resorte y sus unidades son: lb/pie
	5,3	Una medida de la dureza del resorte, para el caso $k = 6\ lb/pie$ calculada a partir de $k = F/s$
	49,6	El valor de la constante de proporcionalidad, según la ley de elasticidad de Hooke que establece: dentro de los límites el estiramiento que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo
	42,1	El valor de la constante de proporcionalidad que permite recuperar su forma original después de ser comprimido o estirado por una fuerza externa
La expresión: La masa se libera inicialmente desde un punto 2 pies debajo de la posición de equilibrio, significa	15	El momento a partir del cual se considera el movimiento, es decir cuando $t = 0$
	33,8	Una condición inicial expresada mediante $y(0) = 2$, allí $y(t)$ es la función desplazamiento del cuerpo
	21,8	Como el cuerpo es liberado debajo de la posición de equilibrio la velocidad inicial es igual a cero y se representa mediante $dy/dt = 0$
	29,3	Las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ a partir de las cuales se considera la situación y permiten hallar la solución particular de la ecuación diferencial
La posición de equilibrio, representa el punto en el que	24,1	El peso del cuerpo suspendido en el resorte es igual a la fuerza restauradora del resorte y $k = 6\ lb/pie$, calculada a partir de $mg = ks$, donde m es la masa del cuerpo en *slug*, g la aceleración local de la gravedad y s el alargamiento en pies del resorte producido por la masa
	6,0	$k = 6\ lb/pie$, hallado a partir de $F = ks$, donde $s = 2\ pies$ corresponde al alargamiento del resorte y $F = 16\ lb$ el peso de la masa
	66,2	$mg - ks = 0$, donde $W = mg$ es el peso del cuerpo, g la aceleración de la gravedad, k la constante del resorte y s el alargamiento del resorte que se produce al colgar el cuerpo de masa m
	3,8	El resorte se alarga $2\ pies = mg/k$ debido al peso de la masa del cuerpo suspendido.
La expresión: El movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\mathbf{1/2}$ de la velocidad instantánea, significa que	9,0	El cuerpo de masa $m = (1/2)slug$ se mueve en un medio que contiene un fluido y éste ejerce una fuerza de fricción entre el cuerpo y el fluido, igual a $F_{fricción} = (-1/2)\, dy/dt$
	21,8	La fuerza de fricción producida entre el cuerpo y el fluido se conoce como fuerza amortiguadora y es proporcional a alguna potencia de la velocidad, $F_{amort} = (-1/2)\, dy/dt$
	33,8	A bajas velocidades la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la magnitud de la velocidad y puede representarse mediante: $F_{amort} = (1/2)\, dy/dt$, donde $c = 1/2$ es la constante de proporcionalidad
	35,3	Como es una fuerza de fricción se opone al movimiento y se representa mediante la relación $F_{amort} = (-1/2)\, dy/dt$, donde $c = -1/2$ es la constante de proporcionalidad
Se puede afirmar que la fuerza de amortiguamiento	41,4	Tiene dirección opuesta al movimiento instantáneo y es proporcional a la velocidad del cuerpo cuando la velocidad es baja
	15,8	Como es proporcional al movimiento del cuerpo, existe la constante de amortiguamiento, representada generalmente por la letra c
	25,6	Si dy/dt es positiva el cuerpo se mueve hacia abajo y la fuerza de amortiguamiento se dirige hacia arriba, representada mediante $F_{amort} = -c\, dy/dt$
	17,3	Si dy/dt es negativa el cuerpo se mueve hacia arriba y la fuerza de amortiguamiento se dirige hacia abajo, representada mediante $F_{amort} = -c\, dy/dt$
La fuerza externa representa	69,2	Cualquier fuerza impuesta sobre la masa por una fuente externa distinta de la fuerza del resorte y la fuerza amortiguadora

Expresiones matemáticas	%	Representación Externa
	3,8	Una fuerza constante, una función periódica o cualquier función arbitraria del desplazamiento, la velocidad o el tiempo
	5,3	Una cantidad positiva cuando actúa en la dirección positiva del desplazamiento y negativa cuando actúa en dirección contraria al desplazamiento
	21,8	Una fuerza que actúa sobre el cuerpo y se conoce como fuerza de entrada o impulsora
Para determinar la ecuación diferencial que rige el movimiento del sistema masa-resorte si se aplica a la una fuerza externa igual a $\boldsymbol{f(t) = 10\cos 3t}$, se requiere	35,3	La segunda ley de Newton $m.a = F_{neta}$ donde F_{neta} es la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cualquier instante, m la masa del cuerpo y a la aceleración debido a que hay cambios en la velocidad del cuerpo
	22,6	La segunda ley de Newton $F_{neta} = (1/2)slug\,(d^2y/dt^2)$, donde d^2y/dt^2 es la aceleración del cuerpo de masa $(1/2)slug$ producida por la fuerza neta
	15,0	La segunda ley de Newton representada mediante la igualdad $d(mv)/dt = F_{neta}$, donde $d(mv)/dt$ es la velocidad instantánea de la cantidad de movimiento mv
	27,1	Conocer que la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo produciendo el movimiento, es igual a la suma del peso del cuerpo, más la fuerza restauradora del resorte, más la fuerza de amortiguamiento, más la fuerza externa

Fuente: Autores

En cuanto a los resultados de algunos ítems con respuesta abierta, las figuras 2 y 3 evidencian las dificultades al representar mediante un diagrama de cuerpo libre la situación problema. Esto muestra la cantidad de conocimiento involucrado en el problema. Valdría la pena preguntase: ¿el por qué estas representaciones?, ¿Qué proceso mentales hizo el estudiante para llegar a este tipo de representaciones?, por sólo cuestionar algunos aspectos.

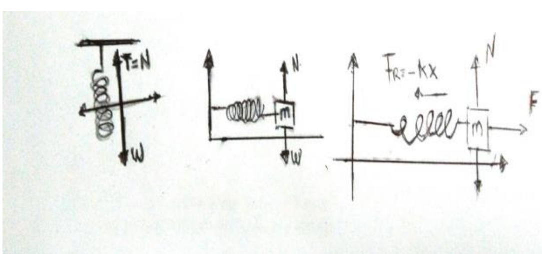

Figura 2. Diagrama de cuerpo libre

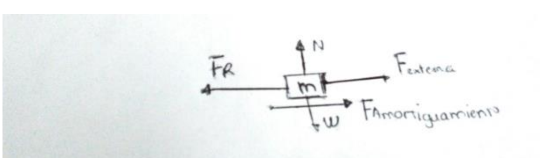

Figura 3. Diagrama de fuerzas

Discusión

Los hallazgos muestran que cada participante hace su propia representación externa a conceptos como: sistema masa-resorte, peso, masa, punto de equilibrio, constante de elasticidad, punto de equilibrio, Ley de Hooke, fuerza amortiguadora, fuerza externa, Ley de Newton, entre otras. Esto posiblemente se debe según (Dubinsky, 1991) y (Edmonds-Wathen, Trinick, & Durand-Guerrier, 2016) a que cada elemento que conforma la situación debe ser interiorizado y el uso del lenguaje fuera del aula es diferente al lenguaje matemático. Reiterado por (Borromeo, 2006), quien afirma que estas se deben a la experiencia y competencias matemáticas del estudiante. Según Schoenfeld (1980), citado por (Barrantes, 2006) lo primero, conocimientos previos que posee ya que éste no los tiene presentes como el profesor y "comparativamente con otras áreas, las matemáticas presentan una característica: son un conocimiento acumulativo" (Toro, 2009).

Al comparar las respuestas a los ítems con respuesta cerrada y abierta se evidencian dificultades en el tránsito del lenguaje natural al lenguaje matemático y la representación externa de cada una de los signos, símbolos o expresiones matemáticas inmersas en el problema de palabra. Coincidiendo con investigadores como (Haghverdi, y otros, 2012), (Calle, 2013), (Bassanezi & Biembengut, 1997), (Sabbagh, 2008) y (Berdugo Oviedo, 2004)o (2004) quienes revelan que los errores de los alumnos en la resolución de problemas de palabras son el resultado de la falta de conocimiento lingüístico, semántico, estructural y comunicacional. El empleo del proceso semántico y del lenguaje matemático es deficiente, no interpretan ni relacionan los signos ya aprendidos con los nuevos, desconociendo el proceso semántico de las significaciones de las palabras.

Lo anterior pone de manifiesto la importancia que tiene el conocimiento semántico en la etapa de traducción cuando se intentan resolver problemas como situaciones reales a modelar. Concretamente en el tránsito que tiene que hacer el resolutor del lenguaje natural al lenguaje matemático, construyendo un modelo mental de la situación (Zafra Tristanch, Vergel Ortega, & Martinez Lozano, 2014) y plasmarlo mediante una representación externa que puede ser una relación, función, gráfico o una ecuación conocido como modelo matemático.

Conclusión

Las respuestas tanto a preguntas con respuestas cerradas como abiertas donde el estudiante tiene que integrar y establecer relaciones entre los diferentes elementos que describen la situación a ser representada evidencian que no necesariamente al tener diferentes representaciones mentales de un concepto implica tener éxito en la formulación del modelo matemático. Además los símbolos son absolutamente indispensables en matemáticas. Los símbolos involucran relaciones entre signos y significados y deben servir para que una persona reconozca el conocimiento implícito (el significado) en términos de símbolos.

A pesar de ser sólo una situación problema, es asombrosa la cantidad de conocimiento y sus relaciones presentes en la situación. Esto implica que el estudiante debe poner en juego y traer a la mente conocimientos que no los tiene presentes como el docente para poder hacer su representación interna y externa. Debido al tránsito que se tiene que hacer del lenguaje en que se presenta el problema de palabra al lenguaje matemático construyendo una representación mental de la situación plasmada en una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes como modelo matemático.

El ideal sería que todos los estudiantes realizaran o se acercaran a la mejor representación del modelo, al no ocurrir esto, posiblemente se deba a que hay algunas dificultades en estas tareas. Para construir la ecuación diferencial que representa el modelo del sistema masa-resorte el estudiante tuvo que evocar conceptos matemáticos vistos con anterioridad como funciones, límites, continuidad, otros modelos matemáticos como Ley de Hooke e incluso conceptos como proporcionalidad, peso, masa, entre otros del nivel educativo precedente.

Los resultados muestran la dificultad en caracterizar las representaciones que hace cada estudiante a la situación, puesto que esta es una actividad del pensamiento humano. Por tanto es necesario realizar trabajos profundizando en el tema con el propósito de buscar explicaciones y contribuir a mejorar la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Por ejemplo desde el punto de vista cognitivo: ¿por qué y a que se debe la diversidad de representaciones mentales de un concepto matemático?, ¿Cuáles de éstas representaciones entiende mejor el estudiante y por qué?

Referencias bibliográficas

Allexsaht-snider, M., & Hart, L. (2001). "Mathematics for All": How Do We Get There? *Theory into Practice*, 40(2), 93-101.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. Retrieved Marzo 15, 2016, from Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemaica: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6886/6572

Bassanezi, R., & Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 32, 13-25.

Berdugo Oviedo, G. (2004). Comprehension and representation of algebra word problems in a second language. Berdugo Oviedo, G. (2004). ComprehensioAvailable from ProQuest Dissertations & Theses A&I: Social Sciences.

Blum , W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. Educational studies in mathematics, 22(1), 37-68.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling : Can It Be Taught And Learnt ? Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45-58.

Borromeo, F. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 38(2),, 86-95.

Calle, C. E. (2013, Septiembre 13). Influencia de la semántica en el aprendizaje de las matemáticas en el segundo curso de bachillerato del Colegio Benigno Malo. (Trabajo de grado de Maestría). Retrieved from http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/4693/1/Tesis.

Camarena, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. Innovación Educativa, 9(46), 15-25.

Dostál, J. (2015). Theory of Problem Solving. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 174,, 2798-2805.

Dreyfus, T. (2002). Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In Advanced mathematical thinking. Springer Netherlands, 25-41.

Dubinsky, E. (1991). Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical ThinkDordrecht: Springer Netherlands: Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical ThinkIn D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95–126).

Edmonds-Wathen, C., Trinick, T., & Durand-Guerrier, V. (2016). Impact of Differing Grammatical Structures in Mathematics Teaching and Learning. In R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, … M. Villavicencio Ubillús (Eds.) . Mathematic Education, 23-46.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Math. Theories of Mathematical Learning, 397-430.

Guerrero, J. G. (2012). Las matemáticas en Ingeniería: todo un reto pedagógico. Ed. Coruniamericana. 1(1)., 75-80.

Haghverdi, Majid, Semnani, Ahmad Shahvarani, Seifi, & Mohammad. (2012). The relationship between different kinds of students' errors and the knowledge required to solve mathematics word problems. Bolems. Bolema: Boletim de Educação Matemática,, 26(42b).

Hashemi, N., Abu, M., Kashefi, H., & Rahimi, K. (2014). Undergraduate Students' Difficulties in Conceptual Understanding of Derivation. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 143,, 318-366.

Ilany, B., & Margolin, B. (2010). Language and mathematics: Bridging between natural language and mathematical language in solving problems in mathematics. Creative Education, 1(3),, 138-148.

Intaros, P., Inprasitha, M., & Srisawadi, N. (2014). Students' Problem Solving Strategies in Problem Solving-mathematics Classroom. . Procedia - Social and Behavioral Sciences, 116, , 4119-4123.

Investigating challenges that Grade 11 mathematics learners face when translating from word problems to linear algebraic representations. Electronic Theses and Dissertations. (2015, julio 17). Retrieved from http://wiredspace.wits.ac.za/handle/105391/17633

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. . Zdm, 38(3),, 302-310.

Kashefi, H., Ismail, Z., & Yusof, Y. (2010). Obstacles in the Learning of Two-variable Functions through Mathematical Thinking Approach.,. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8, 173-180.

Madzorera, A. (2015). Investigating challenges that Grade 11 mathematics learners face when translating from word problems to linear algebraic representations. Electronic Theses and Dissertations. Retrieved Julio 17, 2015, from http://wiredspace.wits.ac.za/handle/10539/17633

Mayer, R. (1986). Thinking, Problem Solving, Cognition. Barcelona: (Trad. Graziella Baravella). (1a ed.). Barcelona: Ediciones Paidos. (Original publicado en 1983).

Moreno, M. M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. Noveno simposio de la sociedad española de Educación Matemática., 81-96.

Muir, T., Beswick, K., & Williamson, J. (2008). "I'm not very good at solving problems": An exploration of students' problem solving behaviours. The Journal of Mathematical Behavior, 27(3),, 228-241.

NCTM. (2000). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. . National Council of Teacher of Mathematics.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. a. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. . Theory Into Practice.

Parra, B. (2001, Marzo 26). Parra, B.M. (2001). Dos concepciones de resolución de problemas matemáticos. En la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Retrieved from http://euler.mat.uson.mx/depto/diplomado/secundaria/lecturas.pdf#page=13

Perales, F. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. . Enseñanza de las ciencias. 11(2)., 170-178.

Pino, J. (2012). Concepciones y prácticas de los estudiantes de pedagogía media en matemáticas con respecto a la resolución de problemas y, diseño e implementación de un curso para aprender a enseñar a resolver problemas. (Tesis doctoral, Universidad de Extremadura). Recuperado de: Marzo 28, 2016, from http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/bitstream/handle/10662/568/TDUEX_2013_Pino_Ceballos.pdf?sequence=1

Polya, G. (2005). Polya, G. (2005). Cómo plantear y resolver problemas. (reimp. XVII). . Mexico: (Trad. Zagazagoitia) Mexico: Editorial Trillas. (Original publicado en 1965).

Rasmussen, C., & Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. The Journal of Mathematical Behavior, 26(3), 195-210.

Romo-Vásquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. . Revista Educación Matemática. S.E., 314-338.

Sabbagh, S. (2008). Solución de problemas aritméticos redactados y control inhibitorio cognitivo. Universitas Psychologica, 7(1),, 217–229.

Santos, L. (2008). La Resolución de problemas: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. Memorias de seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de investigación en Educ Matemática. Retrieved Marzo 07, 2016, from http://www.uv.es/puigl/MSantosTSIEM08.pdf

Sastre-Vazquez, P., Andrea, R. D., Villacampa, Y., & Navarro-Gonzalez, F. J. (2013). Do First-year University Students Understand the Language of Mathematics? Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93,, 1658-1662.

Tobergte, D. R., & Curtis, S. (2013). No Title No Title. Journal of Chemical Information and Modeling, 53(9),, 1689-1699.

Toro, J. (2009). Las Matemáticas: fundamentos de disciplinas y profesores. Retrieved Marzo 09, 2016, from Mineducacion:
http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-189357_archivo_pdf_matematica_1A.pdf_1A.pdf

Vergel Ortega, M., Duarte, H. I., & Martinez, J. J. (2016). Desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de cálculo integral su relación con la planificación docente. Revista Científica, 3(23), 17-29.

Wright, J. (2014). An investigation of factors affecting student performance in algebraic word problem solutions. . Available from ProQuest Dissertations & Theses A&I.

Zafra Tristancho, S. L., Vergel Ortega, M., & Martínez Lozano, J. J. (2014). Enseñanza, Lenguaje y pensamiento en cálculo. Un análisis cualitativo. Revista logos, ciencia & tecnología, 52(2), 379-388.

Zill, D., & Cullen, M. (2009). Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera. (7a ed.). Mexico: Cengage Learning Editores.