Sensores y apps en el estudio de la escala logarítmica*

Sensors and apps in the study of the logarithmic scale*

Sensores e aplicações no estudo da escala logarítmica*

Jeannette Vargas Hernández**
Rafael Felipe Chaves Escobar***
Luis Alberto Jaimes Contreras****

Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Colombia
Escuela Colombiana de Ingeniería

Resumen

La investigación buscó desarrollar una estrategia para el desarrollo profesional de los profesores a partir de una revisión a estudios concernientes al carácter social de aprender, junto con el desarrollo histórico- epistemológico de conceptos, indagó la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas y, realiza una invitación de aprendizaje dirigida a los profesores de pre-cálculo. Ella lleva entrelazado un ambiente de laboratorio, hace uso de sensores y apps, en el análisis de los casos de la escala logarítmica musical y del pH. Se usa la metodología de análisis de contenido con el fin de esbozar caminos concernientes a ¿De qué maneras, los profesores universitarios de precálculo, pueden acercarse a la comprensión y caracterización de las funciones logarítmicas?

Palabras clave: sensores, apps, escala logarítmica, profesor, social, formación.

Abstract

In this proposal for teacher's professional development from a revision of some studies regarding the social character of learning, along with development of historic –epistemological concepts, it is explored the relation between geometrical and arithmetical progressions and it is extended an invitation of learning addressed to Precalculus teachers. This one has intertwined a laboratory environment, making use of sensors and apps, in the analysis of logarithmic musical scale cases and in the pH. It is used the content analysis methodology with the purpose of sketching some ways with regarding to the question: In which ways the Precalculus university teachers are able to approach to the comprehension and characterization of the logarithmic funtions?

Key Words: sensors, apps, logarithmic scale, teacher, social, formation

Fecha de recepción del artículo: 07 de Agosto de 2017
Fecha de aceptación del artículo: 21 de Diciembre de 2017
Fecha de Publicación del artículo: 01 de Enero de 2018
DOI: http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v10i1.420

*El artículo es resultado de investigación: Formación de profesores Sensores y apps en el estudio de la escala logarítmica".

** Doctora en educación matemática, Universidad de Salamanca. Filiación: Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. Correo electrónico: jvargash@unicolmayor.edu.co Orcid: https://orcid.org/0000-0002-8936-696X

***Magister en Docencia de la matemática. Filiación: Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. Correo electrónico: rfchavez@unicolmayor.edu.co. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-1998-3345

*** Magister en Docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Filiación: Escuela Superior de Ingeniería. Correo electrónico: luis.jaimes@escuelaing.edu.co. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2540-6336

Resumo

Na presente proposta para o desenvolvimento profissional de professores a partir de uma revisão a estudos concernentes ao caráter social de aprendizagem, junto com o desenvolvimento histórico-epistemológico de conceptos, se indaga a relação entre as progressões geométricas e aritméticas e se realiza uma compra de aprendizagem dirigida aos profesores de Precálculo. Ella leva entrelazado um ambiente de laboratório, fazendo uso de sensores e aplicações, em análise dos casos da escala logarítmica musical e do pH. Se usa a metodologia de análise de conteúdo com o final de esbozar caminos concernentes a ¿De quais maneras, os professores universitários de Precálculo, podem aproximar a compreensão e caracterização das funções logarítmicas?

Palavras-chave: sensores, apps, escala logarítmica, professor, social, formação.

Introducción

En el ámbito de la educación matemática es claro que las propuestas para el desarrollo profesoral no incluyen exclusivamente la comprensión de procesos cognitivos de los estudiantes en su aprendizaje o el conocimiento matemático del profesor, sino que ellas tratan de impactar en una red de comportamientos del profesor, construcciones del ser y el re-aprendizaje de diversas habilidades y componentes implicadas en la planeación y gestión en el aula; que se materializan en la resolución de problemas del quehacer docente.

Por otro lado, aceptando a la Educación como sistema formal de preparación del ciudadano, ella debe aportar elementos formativos para favorecer procesos de interacción humana de alta calidad que rescaten las diferencias y riqueza del trabajo colaborativo y cooperativo,

"Las estrategias de aprendizaje deben ir dirigidas al desarrollo del estudiante entendiendo este como cambio cualitativo superior al atender, no solo a la utilización de los factores externos del proceso de enseñanza aprendizaje como recursos, medios, sino también a los internos como motivación, valores, actitudes, desarrollo cognoscitivo. Ellas deben generar en los estudiantes autonomía en íntima conexión con procesos socializadores, desarrollo de procesos del pensamiento como reflexión, meta cognición, sentimientos, actitudes ante el aprendizaje y las formas de cooperación en que se pueden obtener, van a ser generadores de desarrollo de la personalidad convirtiéndose en un proceso de enseñanza aprendizaje desarrollador, que atienda el carácter complejo del proceso y de la situación" (González, Recino y Uvaldo, 2013, p. 218).

En el campo de la didáctica de la matemática, se conoce que el profesor tiene formación en los conceptos de las funciones, desde los cursos realizados en su educación; en álgebra y cálculo, entre otros. Al respecto los educadores matemáticos han afirmado que el estudio de la variación es un camino para examinar las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, es decir las funciones polinómicas y respecto a las funciones transcendentes, se ha iniciado desde hace una década un impulso al estudio de la variación exponencial y logarítmica.

Metodología

El proceso que se realiza busca alternativas de respuesta a ¿De qué maneras, los profesores universitarios de Precálculo, pueden acercarse a la comprensión y caracterización de las funciones logarítmicas?

Se utilizó la metodología de análisis de contenido identificando diferentes publicaciones en cuatro temáticas: trabajo colaborativo y cooperativo en la educación superior, modelación en las clases de matemáticas, desarrollo histórico-epistemológico de los conceptos, investigaciones relativas a funciones logarítmicas. En reuniones; una semanal durante un año académico, los investigadores socializaron sus consultas y en equipo se realizó el análisis de la documentación leída; se trianguló información de tal manera que se establecieron los tres contextos reales sobre los cuales se formularían las actividades de modelación en torno a la formación de docentes.

Se siguieron dos caminos: Por un lado, se integran estas cuatro temáticas, se planeó y llevó a término en el primer semestre del año 2015, una experiencias con 127 estudiantes, en cuyo desarrollo se recoge información alrededor de la dinámica de trabajo colaborativo. La tarea que el profesor encarga a sus estudiantes consiste en escribir un cuento, en la cual se contesta a una pregunta específica sobre la función logarítmica.

El procedimiento adoptado para esta experiencia se basó en Vargas y Gacharná (2008) el cual consistió en:

•Lectura general que han realizado los estudiantes, de primer semestre que cursan pre-cálculo, del libro El Diablo de los Números.

•Socialización, de la lectura, en la cual se ha tratado de "explorar" una de las noches y conversar sobre las características que el escritor presenta, concerniente al tema matemático. En dichas conversaciones se permiten comentarios adicionales, con respecto a: dibujos utilizados, diagramas, recursos lúdicos, vocabulario.

•Planteamiento de una pregunta sobre una característica de la función logarítmica.

•Guía sobre la lectura intencionada que realizan, los estudiantes tanto en textos de precálculo como en artículos de revistas especializadas.

•Uso de palabras clave, entre las cuales están: razón de cambio promedio, función logarítmica, función exponencial, progresión geométrica, progresión aritmética, didáctica de la matemática, precálculo.

•A través del proceso de la escritura, el profesor pretende observar dinámicas de los grupos en cuanto:

Cuestionamientos y discusión de los hallazgos. Particularidades de la comprensión que ha alcanzado el grupo de estudiantes.

De otra parte, de manera simultánea se avanzó en el delineamiento de los problemas de modelación y en la escritura de los referentes teóricos, a partir de la comprensión de aspectos de la función logarítmica y de los contextos en que ella es usada en diferentes áreas del conocimiento.

La decisión de partir del referente histórico – epistemológico fue planteada a partir de los estudios realizados, se utilizó para su validación, la confrontación con otras propuestas consultadas en la literatura en Educación Matemática. De allí que se inicie el planteamiento a los profesores a partir lo que se llamó en esta investigación Revisando Regularidades.

Los análisis concernientes a lo característico de cada fenómeno o contexto, en relación con la red de conceptos que integran la comprensión de la función logarítmica y las escalas, fueron definitivos en las decisiones consensuadas de tres investigadores y en las preguntas guía para los profesores a quienes va dirigida la propuesta. Lo anterior ayudó a establecer la experiencia en la cual se detallarían aspectos del trabajo colaborativo y cooperativo, como también la secuencia en que serían tratados los fenómenos; escala musical, pH y escala de Ritcher.

Simultánea a la selección de fenómenos se fue decidiendo el uso que se llevaría a término de herramientas tecnológicas que permitieran un ambiente de laboratorio, por ello se trabajó tanto con los sensores de pH y sonido, como de las aplicaciones para celular y PC. Se utilizó para la escala pH el software LabQuest Viwer, Logger Lite y luego en el estudio y explicación de la escala musical se plantea la opción del software LabQuest Viwer, Logger Lite y se ejemplifica la aplicación Best Tuner o piano virtual.

Revisando regularidades

En cuanto a la formación de profesores y la variación logarítmica en el entorno a la covariación, consideramos importe las investigaciones sobre el desarrollo histórico (Vargas Hernández & Gónzalez Astudillo, 2007; Ferrari M., 2007). Concerniente a la representación gráfica de dicha función se tiene el estudio que parte de la construcción de triángulos semejantes en López y Ferrari (2007) y retomando la génesis del concepto en cuanto a su relación entre la progresión geométrica y aritmética está la propuesta de Vargas Hernández, Pérez Ruiz, & González Astudillo, (2011) en la cual se presenta un análisis y construcción de la gráfica, así como un análisis de las exigencias cognitivas para los docentes de matemáticas, en cuanto a dicha representación gráfica, en Castañeda, Novoa, & Vargas Hernández (2016).

Desde una perspectiva histórica, los logaritmos han estado asociados a la relación entre progresiones aritméticas y geométricas, y algunos autores en el siglo XIX, incluían estos términos en sus definiciones, llamando logaritmos a los términos de una progresión aritmética, que empieza por cero, correspondientes a los de otra geométrica que empieza por la unidad (Vázquez, 1855; González y Vargas, 2007). Trabajar con este tipo de progresiones, se sugiere como un buen inicio para el estudio de los logaritmos (Vargas, 2013; Vargas, Pérez y González, 2011) por lo anterior, a continuación se presenta una serie de sugerencias para el docente, de tal forma que partiendo de la identificación de regularidades, pase a identificarlas y posteriormente establecer su relación, previo e integrado al trabajo con las funciones exponenciales y logarítmicas.

En razón de lo expuesto, se propuso el uso de tablas elaboradas en hojas de cálculo, que permitan identificar al docente, regularidades en cada progresión.

1E-10	1,04858E-14	9,53674E-07	2,73511E-16	0,000976563	1048576
0,000000001	2,62144E-13	3,8147E-06	9,8464E-15	0,001953125	262144
0,00000001	6,5536E-12	1,52588E-05	3,5447E-13	0,00390625	65536
0,0000001	1,6384E-10	6,10352E-05	1,27609E-11	0,0078125	16384
0,000001	4,096E-09	0,000244141	4,59394E-10	0,015625	4096
0,00001	1,024E-07	0,000976563	1,65382E-08	0,03125	1024
0,0001	0,00000256	0,00390625	5,95374E-07	0,0625	256
0,001	0,000064	0,015625	2,14335E-05	0,125	64
0,01	0,0016	0,0625	0,000771605	0,25	16
0,1	0,04	0,25	0,027777778	0,5	4
1	1	1	1	1	1
10	25	4	36	2	0,25
100	625	16	1296	4	0,0625
1000	15625	64	46656	8	0,015625
10000	390625	256	1679616	16	0,00390625
100000	9765625	1024	60466176	32	0,000976563
1000000	244140625	4096	2176782336	64	0,000244141
10000000	6103515625	16384	78364164096	128	6,10352E-05
100000000	1,52588E+11	65536	2,82111E+12	256	1,52588E-05
1000000000	3,8147E+12	262144	1,0156E+14	512	3,8147E-06
10000000000	9,53674E+13	1048576	3,65616E+15	1024	9,53674E-07

Figura 2. Tabla para identificar progresiones. Fuente: Autores

Al trabajar con estas tablas, se plantearon preguntas como ¿Cuál es el patrón que siguen los datos de la progresión en la primera columna? ¿Al examinar la progresión de la columna 3, la diferencia entre dos términos consecutivos cuales quiera es constante o variable? ¿Cuáles progresiones presentan la misma diferencia entre dos términos consecutivos?, este tipo de acciones son realizadas para encontrar que la diferencia entre dos términos consecutivos de cualquiera de las progresiones corresponde a un valor constante, y que progresiones como por ejemplo las que se encuentran en las columnas 2 y 7, tienen en común esta diferencia aunque todos sus elementos no sean iguales. También se promueve la reflexión sobre sus tareas profesionales relativas a la planeación y gestión, iniciando un trabajo en equipo en el cual los profesores propongan otras progresiones que consideren pertinentes, a través de preguntas como: ¿alguna de las progresiones presentadas es demasiado evidente con relación a las preguntas que se hacen sobre ella?, ¿cambiaría usted las preguntas o las progresiones? Considera que las respuestas que usted ha aportado, son similares a las que los estudiantes de pregrado llegarán a exponer o encuentra que debe programar una guía más específica para que ellos analicen las regularidades. De una forma análoga se realizó el trabajo con las progresiones geométricas, como se muestra a continuación:

En relación a estas progresiones (figura 3), las preguntas a plantear fueron fundamentadas en orientar al docente a identificar mediante cocientes entre términos consecutivos la razón de una progresión geométrica, por ejemplo, ¿En la progresión de la columna 1 (Figura 3), es posible encontrar una diferencia constante? ¿Cómo están cambiando los términos?

¿Cuál es la razón entre el término 0.1 y 0.01? ¿Es posible encontrar esta razón con otros términos de la progresión? ¿Qué sucede en la progresión de la columna 3 (Figura 3) al tomar cualquier término y dividirlo en el término anterior? ?, este tipo de preguntas orientan para encontrar un comportamiento diferente en los términos de la progresión, pero que de igual forma al operar dos términos consecutivos (dividir en este caso) es posible encontrar un patrón.

Progresiones geométricas

En cuanto a la notación empleada, se planteó un espacio de discusión con los profesores, para con el aporte de la literatura en Educación Matemática, decidir los momentos convenientes de la actividad, para ir presentando y usando la escritura referida a los n-ésimos términos (…, n, n+1,…) y demás notación específica de tal forma que al utilizarla se facilite su correspondiente comprensión. El paso a seguir, es trabajar con dos listados de progresiones, relacionando sus términos uno a uno, y representando cada par en el plano cartesiano, de tal forma que se pueda identificar un comportamiento común en la gráfica que relaciona dos progresiones de este tipo (aritmética y geométrica).

Para iniciar, las preguntas e indicaciones planteadas en este caso, relacionadas con la identificación del tipo de progresión y la curva que se obtiene al relacionar una progresión aritmética con una geométrica, por ejemplo, ¿Es posible encontrar un patrón en la diferencia o cociente entre dos términos consecutivos de cada una de estas progresiones?, ¿Qué tipo de progresiones son Progresiones Aritméticas y Geométricas.?, posterior a las preguntas, se solicita relacionar cada término de la progresión P.A. con el término correspondiente en la progresión P.G. y finalmente utilizó la hoja de cálculo para representar cada uno de estos pares como un punto del plano cartesiano.

De esta forma, se iniciaría el trabajo previo a los elementos matemáticos relacionados con funciones exponenciales y logarítmicas.

Mirada con énfasis en la gestión de la participación del estudiante. El caso de la escala para el pH.

Desde la perspectiva de la formación del profesor contempla un amplio espectro de conocimientos, habilidades, comportamientos y complejidad. Basado en estudios que desde la didáctica argumentan que se puede promover la formación en los profesores asumiendo la enseñanza más allá de un arte.

El profesor y el trabajo colaborativo

Un trabajo en el aula que busque propiciar una red de interacciones entre estudiantes, en la cual se involucre un cambio de discurso que establezca un giro en el rol del profesor de preguntar- escuchar -validar, por un rol en el cual los estudiantes se sientan invitados a argumentar- escuchar y volver a argumentar, realizando conjeturas y teniendo la oportunidad de experimentar. Ese es un trabajo puede tener momentos en los cuales el docente necesite gestionar en el aula la integración de subgrupos de estudio de los contenidos, de tal forma que un ejercicio en la formación del profesor es aprender a ser miembro, tanto en un trabajo colaborativo como en el cooperativo.

La exposición y análisis de diferencias entre diferencias entre el rol del maestro en el trabajo colaborativo y cooperativo en Maldonado (2007) y Ibarra-Sáiz y Rodriguez (2007) son conocimientos que coadyuvan al docente a tener argumentos, sobre momentos a reformular, en la planificación de sus horas clase.

A partir de lo anterior, iniciamos en esta sección algunas de las reflexiones y el estudio que proponemos en la formación de docentes que se desempeñan en el área de matemáticas en los primeros semestres universitarios (Vargas y Gacharná, 2008). Los resultados surgen a partir de una tarea en la cual el profesor cumple en ocasiones funciones semejantes a las de en un trabajo cooperativo y en otros aspectos son similares a un trabajo colaborativo.

Se considera que el discurso del profesor se vuelve más flexible y profundo, cuando conoce y puede experimentar a través de otras situaciones, que no sean solamente su participación real en clase, sino también los resultados de investigaciones; ya sean estos presentados a manera de relatos, estudios de caso o resultados estadísticos. En la experiencia, se planteó una tarea a los estudiantes de matemáticas de pregrado en su primer semestre de estudios, en I - 2015 y se llevó a término durante todo el semestre con 127 estudiantes, quienes se organizaron en grupos de 5 o 6 estudiantes. De los cuales presentamos la clasificación de la tarea de 7 grupos.

Para la tarea realizada con la asesoría del profesor, el procedimiento consistió en la lectura general del libro El Diablo de los Números (Enzenberger, 1998).

Sobre dicha lectura, durante el semestre se ha realizado al menos una socialización en la cual se ha tratado de "explorar" una de las noches y conversar sobre las características que el escritor presenta, concerniente al tema matemático. En dichas conversaciones se permiten comentarios adicionales, con respecto a: los dibujos utilizados, los diagramas, los recursos lúdicos, el vocabulario, entre otros.

En la consulta guiada que el docente organiza, propone a los estudiantes participar en la indagación sobre las funciones exponenciales y logarítmicas a través de la revisión de algunos artículos específicos publicados en revistas especializadas en educación matemática y con ese fin les propone diferentes preguntas y palabras clave.

Preguntas como, ¿qué relación existe entre las progresiones geométricas y aritméticas en la función exponencial?, ¿cómo establecer la relación mayor o menor que, entre dos potencias indicadas?, ¿existe alguna relación entre la función logarítmica y la función exponencial?, ¿en qué consiste la escala logarítmica? Llevan a recoger información de la producción de los estudiantes y a establecer algunos aspectos de su comprensión.

Se considera que la siguiente clasificación, que presentamos de la producción escrita de los estudiantes, entraña una especial riqueza a las reflexiones que los profesores en formación o en su práctica pueden realizar. Así se examina el concepto sobre el cual desarrollan su escrito, el registro de representación que utilizan los estudiantes, el elemento sobre el cual sustentan su escrito - énfasis – y el uso de las TICS

Tabla 1. Síntesis de la clasificación

No.	Concepto	Foco	Énfasis	Representación	Software TICS
1	Función Logaritmo	Explican : Progresión aritmética y geométrica	Plano cartesiano y relación en los ejes con las progresiones	Numérica Algebraica Gráfica	Geogebra para graficar.
2	Función Logaritmo	Progresiones (completo) y función inversa.	Tablas de datos	Tabular Gráfica Diagrama Sagital	Geogebra para graficar
3	Logaritmo	Orden de los logaritmos en diferentes bases.	Reemplazar en fórmula. Cambio de base.	Analítica	
4	Logaritmo	Orden de los logaritmos en diferentes bases.	Uso de ecuaciones y el logaritmo como inversa de la exponencial	Analítica	Calculadora
5	Logaritmo	Orden de logaritmos en diferentes bases	Uso del exponente como cantidad de factores y recta numérica.	Algebraica y analítica.	
6	Función exponencial y función logarítmica	Relación entre la función logarítmica y la exponencial	Progresiones aritméticas y geométricas	Gráfica	Software graficador

7	Logaritmo	Orden de logaritmos en diferentes bases	Fórmula para cambio de bases	Algebraica

Fuente: Autores

Concerniente a producción escrita.

Algunos de los aspectos -considerado es importante resaltar, del escrito que realizan los grupos de los estudiantes, los presentamos a continuación, retomando partes de los textos escritos por ellos:

> "El diablo ignorándolo le respondió: Ya que has entendido, comenzaré con el primer paso para poder graficar la función logarítmica. Para esto, primero debemos hacer lo que haríamos con cualquier función; tomaremos en cuenta la siguiente ecuación y realizaremos una tabla de valores, para así saber qué puntos debemos tomar en cuenta para formar nuestra gráfica, Antes de empezar, debemos tener en cuenta esta ecuación – El diablo saco de sus bolsillos unas letras y números que inmediatamente ocuparon un lugar no muy lejano en el espacio y = $\log_2 x$". (Enzenberger, 1998)

-¿Puedes ver las correspondientes tablas de las ecuaciones?

-Pero claro que puedo, y antes de que preguntes te voy a responder, observo la relación inversa de las dos tablas que en la primera ecuación exponencial convierte valores pequeños, agrandándolos para que la ecuación logarítmica los transforme en su valor original, tomando valores muy grandes volviéndolos pequeños; según las ecuaciones, cuando elevamos nuestra base dos a cero, el resultado será uno, cuando lo hacemos con uno el resultado será dos, y así sucesivamente, inversamente igual, es bastante fácil de relacionar – Dijo Robert emocionado, estaba entendiendo todo a la perfección y no podía estar más agradecido con su amigo Diablo".(Estudiantes, 2015)

X	Y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

X	Y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Figura 1. Tabla de valores. Fuente: Autores

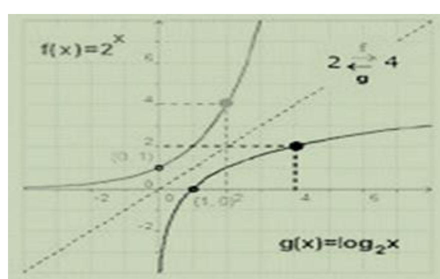
Enseguida retoman la gráfica para las dos tablas de valores (Figura 1). Luego de presentar ejemplos de la progresión aritmética y geométrica, encontramos:

> *"El diablo con una cara de perversión se acerca a Robert y le dice – Bien muchacho, ahora te voy a poner a prueba ya que entendiste muy bien las progresiones, te daré una progresión aritmética y una geométrica, tendrás que darme la explicación de cuál es la relación de estas dos con la función logarítmica – El diablo hizo aparecer unos números en el viento los cuales se formaron de esta manera (*

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Bueno diablo, claramente las puedo identificar, la primera es una progresión geométrica de razón 2 y la segunda es una progresión aritmética de diferencia 1. Además, la progresión aritmética es la sucesión de los exponentes de los términos de la progresión geométrica, expresados éstos como potencias de 2, lo mostrare dibujándolo en el suelo – Robert empezó a dibujar con su dedo sobre el suelo, sus dibujos fueron tomando la siguiente forma:

$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	$32 = 2^5$	....
0	1	2	3	4	5	....



Luego cada

ISSN 2145–549X | ISSN 2422-4200 - Vol. 10, No. 1, Enero – Marzo 2018

$$3 = \log_2 8 \;;\; 5 = \log_2 32 \;;\; 8 = \log_2 256$$

1	2	4	8	16	32	64	.....	x
0	1	2	3	4	5	6	......	$\log_2 x$

Figura 2. Función – término de progresión geométrica

El término de la progresión aritmética se obtiene calculando el logaritmo de base dos, del correspondiente término de la progresión geométrica

En la observación concerniente al Grupo 5, llama la atención que los estudiantes escriban:

> *"En efecto mi pequeño aprendiz. Si ya sabemos que los números saltarines crecen con gran rapidez, por el contrario, los números caídos (logaritmos) descienden a gran velocidad– afirmó el anciano". (Grupo de estudiantes de primer semestre)*

Es de tener en cuenta que la razón de cambio promedio de esta función nos está mostrando un lento crecimiento, por lo tanto se considera necesario que el profesor indague sobre el significado de afirmaciones como la presentada por los estudiantes, en el párrafo anterior y les permita analizar las dos funciones respecto a su razón de cambio y la escala logarítmica con números enteros, que parece ser lo mencionado en la interpretación de los estudiantes.

Se observa a los estudiantes universitarios imprimirle a la estrategia de trabajo en grupo se coincide con otros investigadores (Ibarra-Sáiz & Rodriguez, 2007) en que esta estrategia les permite hacer lo siguiente:

- abordar tareas de aprendizaje retadoras
- debatir con argumentos y expresar opiniones fundamentadas
- construir argumentos sobre la base de las aportaciones de los demás
- ser conscientes del valor de las propias aportaciones personales
- valorar positivamente las aportaciones de los compañeros

Para el objetivo solo se toman los segmentos de tal forma que por medio de ellos, habiliten a plantear reflexiones al profesor, que le permitan hacer uso o re-aprender sus conocimientos de la enseñanza de las matemáticas (Vargas, En prensa; Oliveira & de la Roque, 2011).

Algunos de los aspectos del escrito que realizan los grupos de los estudiantes, se presentan a continuación, se retoman partes de los textos escritos por estudiantes:

> -Ya sé, vas a enseñarme alguna forma en la que pueda utilizar las funciones logarítmicas. Dijo Robert.
> -Qué listo eres, así es. Dijo el diablo.
> - ¿Sabes cuál es la medida de acidez de un líquido?
> -Sí, es el pH. Responde Robert
> -Correcto está basado en la cantidad de iones de hidrógeno $[H^+]$ en el líquido.
> La fórmula del pH es:
> $pH = -\log [H^+]$
> -Fíjate, $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno y está dada en una unidad llamada mol/l, donde 1 mol equivale a $6{,}22 \times 10^{22}$ moléculas de átomos.
> -Tenemos en este recipiente jugo de limón, vamos a averiguar cuál es la medida de acidez.
> El diablo toma dos tiras de papel tornasol y las introduce en el recipiente, en poco tiempo cambia de color; la azul cambia a rosado y la roja conserva el color.
> -Es un líquido ácido, pero necesitamos una cifra exacta. Dijo Robert.
> -Muy bien, Robert. Agregó el diablo.

1. ¿Considera que es correcta la definición de pH presentada en el escrito de los estudiantes (figura 6), o preferiría revisar ese concepto antes de usarlo en su clase de matemáticas?

2. ¿Explique cómo y por qué utilizaría usted el pH – grado de acidez o basicidad de una sustancia - para enseñar la función logarítmica o a manera de una aplicación de dicha función?

Ahora el diablo toma un peachimetro y lo introduce en el recipiente, este arroja 1.7, como resultado.- Recuerda que: de 0 a 6 es un ácido, 7 es neutra. De 8 a 14 es básica. La pregunta que tenemos que responder es: ¿cuál es la concentración de iones de hidrogeno (mol/l) del jugo?
- ¿Cómo puedo hacer esto?, Robert pregunta.
- Primero se debe sustituir el pH conocido en la fórmula y representa tu incógnita $[H^+]$ con la variable x.

Si 1,7= -log x, entonces log X= -1.7 Resuelve x.pH=-log [H^+] 1.7= -log x -1.7= log x
- Entonces se utiliza la inversa de logaritmo para despejar a x y ¿Cuál es la inversa?
- La exponencial. Contesta Robert.
- Y así hallamos la respuesta: $10^{-1.7}$
-Oh, gracias, la concentración de iones de hidrogeno en el jugo de limón es de 0.019952623…

3. ¿Qué grado de comprensión de la función logarítmica, está exhibiendo un estudiante que solucione este problema, de la manera expuesta en la figura 3?

4. ¿Qué explicación brindaría usted a un estudiante que pregunte, por qué aplicar el logaritmo a la concentración de iones hidrogeno, para identificar la acidez, en lugar de usar, para referirse a la acidez, simplemente el número hallado?

5. ¿Cómo continuaría usted esta noche, para examinar la razón de cambio promedio, en algunos puntos de la función logarítmica?

6. Realice un ensayo que contenga un diálogo, de al menos cuatro intervenciones de dos de los personajes, explicando la razón de cambio promedio de la función logarítmica.

7. Sea el siguiente experimento, utilizando un conjunto de sensores y un equipo para recolectar datos. Utilizando LabQuest*2 para recolectar los datos y un sensor de pH para líquidos y semisólidos (Flat pH Sensor) del conjunto de Vernier Software & Tecnology.

El profesor de matemáticas tiene un acceso limitado a los laboratorios de química y física, razón por la cual se opta por trabajar con un equipo portátil que incluye dos Labquest2, un sensor de sonido, uno de temperatura y uno de pH. Es importante señalar que el laboratorio como tal trae también la posibilidad de medición de intensidad de la luz. Todos estos fenómenos permiten modelar fenómenos a partir de funciones logarítmicas.

Es posible tener comunicación entre los LabQuest*2 y trabajo simultáneo entre los demás integrantes del equipo desde su celular o tablet; descargado previamente la app Verinier Graphical Analysis free. También es posible tener acceso a las pantallas de los dispositivos con el software LabQuest Viwer e interactuar desde la pantalla de los computadores y descargar el software Logger Lite.

En el caso de la escala musical el profesor puede entrar a indagar algunas tomas de datos con el uso del micrófono una vez se haya familiarizado con el conjunto de aparatos que formaran parte de su laboratorio portátil.

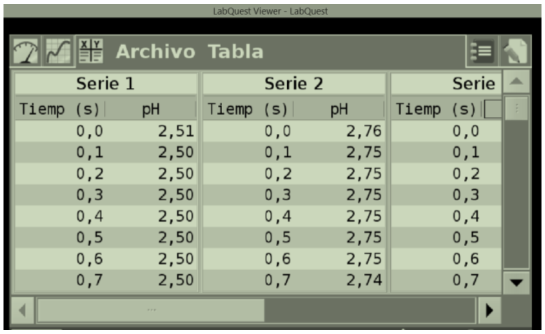
El siguiente es un caso de pH; en cinco momentos diferentes un jugo de limón que inicialmente tiene un volumen de 12,5 ml y cuyo pH es 2.80 y vamos en cada evento diferente agregando 12.5ml de agua y realizando una medición del pH de esta mezcla, cuyos datos se presentan en la siguiente tabla. La gráfica que se obtiene al analizar los datos de los momentos contra el pH(Tabla2)

Tabla 2. Datos pH

Evento	pH	[H*]
1	2,79882292	0,00158919
2	2,88941116	0,00129
3	2,9917641	0,00101914
4	3,04529352	0,00090096
5	3,1099994	0,00077625

Fuente: Autores

En un experimento un grupo de profesores ha tomado datos del cambio del pH de una dilución de limón (Figura), en la cual se centran en las columnas tituladas serie dos en las cuales podemos examinar las variables tiempo en segundos y pH. Se observa que en el intervalo de 0.6 segundos a 0.7 segundos el pH tuvo un cambio de 2.75 a 2.74. Por lo anterior no se puede concluir que en una décima de segundos la concentración de iones hidrogeno cambio una centésima. ¿Cuál sería una conclusión correcta del cambio que sufrió las concentraciones de iones hidrógeno y cuál el papel del logaritmo en dicha explicación?



Serie 1		Serie 2		Serie
Tiemp (s)	pH	Tiemp (s)	pH	Tiemp (s)
0,0	2,51	0,0	2,76	0,0
0,1	2,50	0,1	2,75	0,1
0,2	2,50	0,2	2,75	0,2
0,3	2,50	0,3	2,75	0,3
0,4	2,50	0,4	2,75	0,4
0,5	2,50	0,5	2,75	0,5
0,6	2,50	0,6	2,75	0,6
0,7	2,50	0,7	2,74	0,7

Figura 3 Datos pH. Fuente: Autores

De igual manera trabajan con las siguientes inquietudes:

8. ¿Qué diferencia de concentración de iones hidrogeno existe entre una dilución de pH 3 y una de pH 4? ¿Es la misma diferencia de concentración de iones hidrógeno entre una dilución de pH3 y pH4 que la que hay entre una dilución con pH entre 5 y 6?, ¿Cuál es el comportamiento de las diferencias?

El caso de la escala musical.

Mirada con énfasis en la relación entre una progresión aritmética y una geométrica.

Existen estudios de la función logarítmica que señalan la importancia de comprender está función vinculada al desarrollo histórico – epistemológico del concepto, además afirman que en las aulas, la presentación de las funciones logarítmicas, como inversa de las funciones exponenciales, ha conducido a que se descuiden aspectos que las dotan de significado, destacando entre ellos la relación entre la estructura multiplicativa de la variable independiente y la aditiva del logaritmo (Vargas, J., Pérez, M., González, MT., 2011)

Definiciones de logaritmo como vínculo entre una progresión aritmética y una geométrica fueron utilizadas en el siglo XIX. (Serret, 1887), por ejemplo, establecía la siguiente:

I. Dadas dos progresiones crecientes e indefinidas:

$$1, r, r^2, r^3, r^4 \ldots \qquad (1)$$

$$0, d, 2d, 3d, 4d, \ldots \qquad (2)$$

una por cociente, comenzando por 1, y la otra con diferencia d comenzando por cero, se llama logaritmos de los números que forman parte de la progresión por cociente a los números que le corresponden respectivamente en la progresión por diferencia. Las dos progresiones, de las cuales se trata constituyen un sistema de logaritmos, sujetas solamente a la condición de comenzar la primera por 1 y la segunda por 0. (Serret, 1887, p. 270).

Una representación gráfica del concepto de logaritmo dado por Serret, en un contexto de geometría dinámica, se muestra a continuación. Tomemos la progresión geométrica 1, r, r^2, r^3,… y la aritmética 0, d, 2d, 3d,… en donde diremos, con Serret, que logaritmo de 1 es 0, logaritmo de r es d, logaritmo de r^2 es 2d, etc. En el eje horizontal colocamos la progresión geométrica y en el vertical la aritmética (los logaritmos).” (Vargas, J., Pérez, M., González, MT., 2011, p.132)

Existen otros autores como López y Ferrari (2007), además de los mencionados en el recuadro anterior, que describen una construcción de la representación gráfica de la función logarítmica.

9. Puede usted planear la lectura de estos dos artículos e intentar realizar las construcciones allí exhibidas, para luego presentar sus conclusiones, utilizando el software que sea necesario, en una puesta en común. Si tiene un equipo de profesores. Un grupo puede realizar la presentación de una construcción y el otro grupo interrogar sobre los argumentos que la sustentan. Luego el otro grupo pasa a ser el expositor, con un esquema que aporte en estrategias que inviten a establecer un diálogo que estimule las habilidades de escuchar las intervenciones de cada participante.

Escala Musical – La Octava Musical. No solo las ocho notas musicales se originan al hacer vibrar una cuerda de distintas longitudes, de igual manera se pueden construir al dividir en diferentes partes un tubo por el cual circula aire (Figura 4).

_________________________________ do (Unidad)

_____________________________re (8/9)

_________________________ mi (64/81)

_________________________ fa (3/4)

______________________ sol (2/3)

___________________ la (16/27)

__________________ si (128/243)

_________________ Do (1/2)

Figura 4. División para construir las notas musicales. Fuente: http://proyecto-artistico.blogspot.com.co

De la figura anterior se puede extraer la sucesión de las ocho notas (Es usual encontrar el uso de mayúsculas al escribir las notas musicales (DO RE MI FA SOL LA SI DO), la diferencia entre el primer Do y el segundo Do es que el último da el inicio de la siguiente octava) de la escala musical: *do re mi fa sol la si Do.* A esta sucesión se le denomina *octava musical*. Cada nota tiene su correspondiente octava, más aguda a la derecha (o por encima) o más grave a la izquierda (o por debajo). Por ejemplo, tomando como base la nota *do* central (se le conoce como *tónica* por ser la nota base, sin embargo cualquier otra nota puede ser la tónica) su octava superior es la nota *Do* (figura 5).

Hoy por hoy las notas musicales no se definen de acuerdo a la longitud del objeto vibrante, sino a partir de la *frecuencia de vibración de la onda sonora* emitida por dicho objeto (Tomasini, 2007). La ecuación $f = \frac{v}{l}$ relaciona la frecuencia f (medida en *hertz)* y la longitud de onda l (medida en *metros*), con v la velocidad del sonido medida en metros por segundo. Frecuencias muy altas caracterizan tonos agudos, frecuencias muy bajas caracterizan tonos graves.

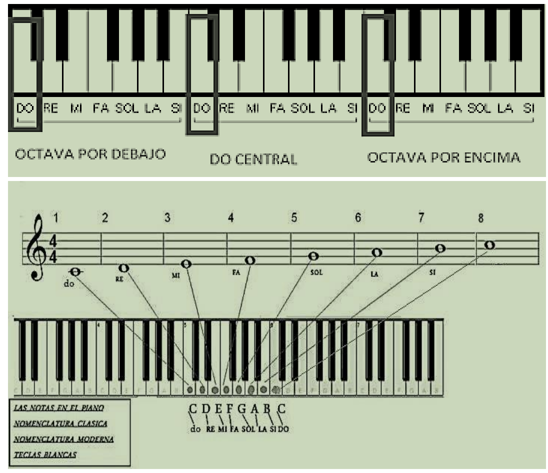


Figura 5. Sucesión octava musical. Fuente: https://sweepfliping.wordpress.com

Materiales: Sensor de sonido y LabQuest- Aplicación de celular (Ejemplo: Best Tuner) en caso de no tener el sensor- Aplicación piano virtual (usar virtualpiano.net). Usando el sensor de sonido y el LabQuest*2 o la aplicación de celular registre en una tabla (la cual se llamará Tabla 1) las frecuencias emitidas por las ocho notas musicales centrales de un piano (figura 5). Se observan las teclas que marcan las ocho notas musicales centrales, pero surge naturalmente el interrogante ¿Qué indican las 5 teclas negras que se encuentran entre las teclas blancas que marcan las ocho notas musicales centrales? Pues bien en el siglo XVIII Juan Sebastián Bach (1685 - 1750), en su obra "El clave bien temperado" efectuó algunos cambios fundamentales que habían sido introducidos a la escala musical. Es a partir de este momento en que la nueva escala llamada *temperada* es utilizada en Occidente (Álvarez, 1991). En esta escala existen once frecuencias intermedias entre una nota y su octava más aguda, estas son: do do# re re# mi fa fa# sol sol# la la# si Do

Donde el signo *#* indica una nota *sostenida*; en el piano corresponden a las 5 teclas negras que se encuentran entre las teclas blancas (Figura 5). De lo anterior se puede concluir que todo el conjunto de notas es una octava y que en el teclado de un piano se tienen varias octavas (Ver figura 15).

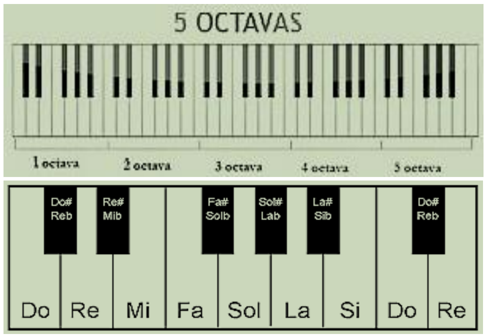


Figura 6. Fuente: http://www.estudiarpiano.com

Construya una segunda tabla, use las frecuencias de la Tabla 1, agregando las frecuencias de las notas sostenidas y las frecuencias de las notas que están ubicadas en la cuarta octava del piano que se muestra en la figura 15. Luego verifique la relación que define la proporción armónica, para ello elija como tónica otra nota distinta a *do* y encuentre el intervalo de cuarta.

El valor de la longitud del intervalo de cuarta viene dado por el cociente entre las frecuencias de la tónica y su cuarta. En el caso de la nota *do* y su cuarta *fa* se tiene:

$$\frac{f_{fa}}{f_{do}} = \frac{348,3}{261} \cong \frac{4}{3} \quad (2)$$

10. ¿Qué relación existe entre la media aritmética y las notas musicales? Para responder a esta pregunta es necesario considerar la tabla construida en la primera actividad. Elija una nota musical y su octava, calcule la media aritmética entre sus frecuencias. ¿El valor obtenido es aproximadamente la frecuencia de cuál nota? ¿Qué relación tiene esta última con la tónica elegida?

Si se han resuelto satisfactoriamente las preguntas antes formuladas es posible que el estudiante deduzca que la media aritmética establece una relación entre la tónica y su quinta, esto es lo que se conoce como el intervalo de quinta. El valor de la longitud del intervalo de quinta se encuentra hallando la razón entre la quinta y su tónica, por ejemplo, tomando como tónica la nota *do*, su quinta es la nota *sol*; el valor de la longitud del intervalo de quinta es:

$$\frac{f_{sol}}{f_{do}} = \frac{391,1}{261} \cong \frac{3}{2} \quad (3)$$

La media armónica de dos números se define como:

$$b = \frac{2ac}{a+c} \quad (4)$$

La proporción armónica define la relación entre la tónica y su cuarta, por ejemplo, al considerar *a* como la frecuencia de la nota *do* y *c* como la frecuencia de la *Do*, es decir la octava de *do* se obtiene aproximadamente la frecuencia de la nota *fa*, esto se conoce como intervalo de cuarta o cuarta perfecta, así si elegimos como tónica la nota *do* la nota con la que cual estaría relacionada es la nota *fa*.

11. Construya una tabla usando las frecuencias de la Tabla 1, agregando las frecuencias de las notas sostenidas y las frecuencias de las notas que están ubicadas en la cuarta octava del piano que se muestra en la figura 15. Luego verifique la relación que define la proporción armónica, para ello elija como tónica otra nota distinta a *do* y encuentre el intervalo de cuarta.

El valor de la longitud del intervalo de cuarta viene dado por el cociente entre las frecuencias de la tónica y su cuarta. En el caso de la nota *do* y su cuarta *fa* obtienen:

$$\frac{f_{fa}}{f_{do}} = \frac{348,3}{261} \cong \frac{4}{3} \quad (5)$$

Verifican que la longitud del intervalo de cuarta no varía al realizar el cociente entre cualquier otra nota musical y su cuarta. Si se toma las frecuencias de las notas centrales $a = f_{do}$ y $b = f_{Do}$ (frecuencias de las notas *do* y *Do* respectivamente ubicadas en la tercera octava de un piano) se obtiene la frecuencia de la siguiente octava de *Do*, denotada por *Do4.* La media geométrica se expresa entonces como:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{f_{Do}}{f_{do}} = \frac{522}{261} \cong \frac{2}{1} \quad (6)$$

Y definen la relación entre octavas sucesivas o intervalo de octavas. Verifican al usar las frecuencias de la tabla, toman como tónica otra nota distinta a do y encuentran su octava. El valor de la longitud del intervalo de octavas viene dado por el cociente entre las frecuencias de la tónica y su cuarta, al tomar las frecuencias de las notas *do* y su octava *Do*, se puede encontrar que el valor de la longitud del intervalo de octava es 2. Lo anterior quiere decir que la frecuencia de una nota una octava más aguda que otra es exactamente el doble de esta, así si se tiene un *La* a una frecuencia de 440 Hz (herz), el siguiente *La* más agudo (1 octava más arriba) estará exactamente a una frecuencia de 880 Hz, mientras que el anterior, más grave (1 octava más abajo), estará a la mitad con una frecuencia de 220 Hz. Verifican que la longitud del intervalo de cuarta no varía al realizar el cociente entre cualquier otra nota musical y su octava.

Progresión aritmética. Por ejemplo, la sucesión de números 1, 6, 11, 16, 21… es una progresión cuya diferencia es 5. Completan la tabla 2 con sus respectivas frecuencias**.**

Tabla 3. Posición de Notas musicales para analizar frecuencias

Posición	Nota musical	Frecuencia
1	do2	
2	do#2/reb2	
3	re2	
4	re#2/mib2	
5	mi2	

Fuente: Autores

12. ¿Según la Tabla 2 en la columna posición, cómo está relacionados el listado de números que aparecen? ¿De acuerdo a la respuesta obtenida en la pregunta anterior, se puede concluir lo mismo de la lista de frecuencias? Si la respuesta no es afirmativa ¿cómo podemos establecer una relación entre los valores de la lista de frecuencias?

Progresión geométrica. Considérese la nota *La* a la derecha del *do* central, la cual tiene una frecuencia de 440 Hz, el sonido de referencia recomendado internacionalmente para la afinación de los instrumentos. Además como ya se ha dicho la relación entre octavas es de 2 a 1, por lo que la diferencia entre el *La3* y el *La4* es de 220Hz, mientras que entre el *La4 y La5* es del doble, 440Hz. De igual manera, entre *La*5 y *La6* sigue siendo el doble, 880Hz. Si se representa en un eje de coordenadas la frecuencia de cada nota musical 14. ¿La representación es lineal?, al reflexionar un poco sobre esta pregunta la respuesta fue no, aunque sobre el papel si se observe que hay la misma distancia entre *La3* y *La4*, *La4* y *La5*, … Construya una tabla similar a la Tabla 2 que contenga las frecuencias de cada nota musical entre la 3ra, 4ta y 5ta octava de un piano, incluyendo las notas sostenidas o bemoles. Luego elabore un gráfico y explore lo comentado en el párrafo anterior.

Este tipo de series en las que la linealidad se pierde, pero en las que se determina una proporción constante es lo que se conoce como una progresión geométrica (Pastor, 2088). Lo anterior sugiere el uso de los logaritmos para poder representar linealmente magnitudes que varían exponencialmente. Se deduce entonces que las notas uniformemente espaciadas a lo largo de un piano es la visión logarítmica de la progresión geométrica. Pero si esto es cierto entonces debe existir un factor multiplicativo constante o en otras palabras la razón de la progresión, ¿cuál es esta razón?

Para dar respuesta al interrogante primero se debe considerar la definición de progresión geométrica y relacionarla con la teoría musical descrita a lo largo de este trabajo de investigación.

Antes de hacerlo cabe mencionar por ejemplo que la diferencia entre la nota *Sol* y *Sol#* es lo que se conoce como un semitono más alto (o un *La bemol*, eso se deja a consideración) igual que en el caso de las notas *Fa#* (o *Sol bemol*) y *Sol*, las cuales tienen una diferencia de un semitono más bajo. Lo anterior quiere decir que entre dos notas consecutivas cualesquiera existe siempre, exactamente, el mismo intervalo. Así, en la escala temperada dos frecuencias de notas consecutivas verifican la relación:

$$\begin{gathered} f_1 = f_0 r \\ f_2 = f_1 r = f_0 r^2 \\ f_3 = f_2 r = f_0 r^3 \\ f_4 = f_3 r = f_0 r^4 \\ \vdots \\ f_n = f_{n-1} r = f_0 r^{(n-1)} \\ f_{n+1} = f_n r = f_0 r^n \quad con\, n = 0,1,2,3, \dots \end{gathered} \tag{7}$$

Sorprendentemente las anteriores igualdades tienen la forma de una progresión geométrica de razón r en la que el término general caracteriza la relación entre las diferentes frecuencias de la escala temperada y donde f_0 indica la frecuencia de la nota tónica (o nota menor). Un resultado adicional de esta ecuación es que permite encontrar el valor de la frecuencia de cualquier nota musical de la escala siempre y cuando se conozca el valor de la razón.

15. ¿Cómo se podría encontrar el valor de la razón? Considere como tónica la nota *La* que está a la derecha del *do* central (denotada por *La4*), la cual tiene una frecuencia de 440 Hz. Es claro que su octava más alta está ubicada a 12 semitonos de ella, esta es la nota *La5*, la cual tiene frecuencia

880Hz. Entonces, para encontrar el valor de la razón considérese la nota siguiente a *La* un semitono más alto, es decir, la nota *La#4* que tiene por frecuencia:

$$f_{La\#4} = 440\, r \quad (8)$$

A su vez, la frecuencia de la nota siguiente, *Si*, es:

$$f_{Si4} = 440\, r\, r = \ 440\, r^2 \quad (9)$$

Luego de la nota *Si4* empieza la quinta octava con la nota *Do5* con frecuencia:

$$f_{Do5} = 440\, r\, r\, r = \ 440\, r^3 \quad (10)$$

Y así hasta llegar a la nota *La5*, por lo tanto:

$$f_{La5} = 440\, r^{12} \quad (11)$$

Ya que al repetir el proceso anterior hemos avanzado doce semitonos y como se conoce además que la frecuencia de la nota *La5* es 880Hz, sustituyendo en la última ecuación y despejando r se tiene que:

$$r^{12} = 2 \rightarrow r = \sqrt[12]{2} \quad (12)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, calcule las frecuencias de Re5, Fa#5 y del Do4. ¿Qué pasa en este último?

Relación entre la progresión aritmética y la progresión geométrica con la escala musical Al representar dos octavas de un piano en el pentagrama se obtiene (figura 7)

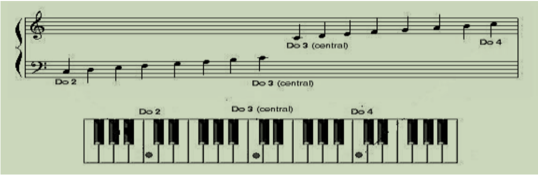


Figura 7. Relación entre las progresiones aritmética y geométrica con la escala musical

Al graficar en ejes coordenados las frecuencias de las notas musicales, se obtiene la figura 7 que los puntos que son de la forma (posición, frecuencia) se ajustan a la gráfica de una función exponencial. Lo más llamativo de todo esto es que tomando logaritmos es posible alinear las notas de un modo similar al que se hace en un pentagrama. La razón principal está en que el pentagrama es un gráfico logarítmico el cual muestra la diferencia entre los logaritmos de las frecuencias y no la diferencia entre las frecuencias.

Aunque dentro de la teoría musical se deben considerar las notas que difieren de medio tono o de un tono, los sostenidos y bemoles quienes modifican estos saltos de medio tono arriba, medio tono abajo, entre otros. Lo cual sugiere que el pentagrama no es una escala logarítmica perfecta pero muy útil para toda persona interesada en aprender a leer partituras.

Conclusiones

La comprensión de la función logarítmica que proponemos, a través de su génesis histórica, concerniente al vínculo entre las progresiones geométrica y aritmética, aplicado a fenómenos específicos, demanda el estudio sistemático de una red de conceptos que invita al profesor a profundizar no solo en la matemática sino en las diversas formas de llegar a comprenderla y el compromiso en las tareas profesionales de planificación de las clases, la gestión de la discusión en sus clases.

En el ámbito de la matemática es de gran riqueza integrar el uso de hoja de cálculo dinámica y el programa geogebra, sin embargo hay que establecer estrategias para que lleguen al aula. De allí, la decisión de incluir, como ejemplo, las secuencias elaboradas por los estudiantes, quienes se apoyan en consultas en revistas de didáctica de la matemática.

El trabajo que se propone en la hoja de cálculo, inicia en el análisis del comportamiento y de las regularidades, recurriendo luego al uso del sensor de sonido y el LabQuest*2 o la aplicación de celular. Esto permite establecer y validar conjeturas, y abre un campo de oportunidades al docente para explorar diferentes formas de presentar la escala logarítmica con herramientas cercanas a los estudiantes y en contextos como la música, resaltar su nexo con las progresiones.

La investigación muestra ejemplos que coinciden con hallazgos, en estudios que se han llevado a término, con grupos de estudiantes universitarios, quienes manifiestan un más alto nivel de implicación cuando se desarrollan las clases en grupos de trabajo cooperativo y colaborativo.

Referencias bibliográficas

Alvarez, J. M. (1991). Matemáticas y Música: El matrimonio secreto. *Revista números*. 21. Sevilla.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and aplications in mathematics education.The 14th ICMI Study*. New York: Springer

Enzenberger, H. M. (1998). *El diablo de los números*. Madrid, España: Ediciones Siruela

Ferrari, M. (2007). Construcción social del conocimiento matemático: La función logaritmo. México.: Departamento de Matemática Eductiva. Memoria Predoctoral. Cinvestav-IPN, México.

González, S. y Recino, U. (2013). Las estrategias de aprendizaje en el Educación Médica Superior. *Edumecentro*, 5(3), 212-224. Recuperado en 11 de febrero de 2017, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077287420130003000015&lng=es&tlng=es.

González, M. T., & Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: La función logarítmcia. *Matemática: Enseñanza Universitaria*, 129-144.

González, M. T., & Vargas, J. (2015). Aportes de la historia de la matemática a la investigación en DMA. En C. Azcárate, & et al, Didáctica del análisis maytemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM (págs. 53-63). Santa Cruz de Tenerife, España: Universidad de la Laguna.

Ibarra-Sáiz, M. S., & Rodríguez, G. (2007). El trabajo colaborativo en las aulas universitarias: reflexiones desde la autoevaluación. *Revisa de Educación*, 369, 355 - 375.

López, R., & Ferrari, M. (2007). La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 20, 450 - 455.

Maldonado, M. (2007). El trabajo colaborativo en el aula universitaria. *Revista de Educación*, 13(23), 263 - 278.

Oliveira, A., & de la Roque, G. (2011). O potencial das actividades centradas em produçoes de alunos na formaçao de professores de matemática. RELIME. *Revista l.* 9(2). 89

Pastor Martín, Angel (2008). Matemáticas en la música. *Revista SUMA*. 59, 17-21.

Serret, J. (1887). Traité d'arithmétique (séptima edición). . París, Francia: Gauthier-Villars.

Sureda, D. P., & Otero, M. R. (2015). Solving Exponential Situations and Conceptualization. *Educacao Matematica Pesquisa*, 17(2), 5 - 28.

Tomasini, M.C. (2007). *El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces* Pitagóricas, C&T. Palermo: Universidad de Palermo. 15-27.

Trigueros Gaisman, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, Enero-Marzo, 75-87.

Vargas, J. (2017). *Investigación Formativa y Virtualidad. Papel de los docentes universitarios. Nova*. Bogotá: Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

Vargas, J. (2013). Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales. Salamanca, España: Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca.

Vargas, J., & Gacharná, H. (2008). Capacidad de búsqueda bibliográfica: investigación formativa con estudiantes de bacteriología y laboratorio Clínico de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. *NOVA*, 6. 85 - 93.

Vargas, J., Castañeda, M., & Novoa, J. (2016). Historia y epistemología de la función logarítmica: conceptualización y marco teórico para la enseñanza del concepto. El caso de la representación de la curva logarítmica. En Diario de Campo. Bogotá: Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

Vargas, J., Pérez, M., & González, M. T. (2011). El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética? En P. P. (Ed.), Memorias del 20o. Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (págs. 129-138). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Vázquez, V. (1855). *Tablas de logaritmos vulgares desde el 1 hasta el 2000*. Madrid : XX Edición..

Villa, J. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*. (27), Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102