Rosa Virginia Hernández*
Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia

Errores matemáticos en el conocimiento procedimental al resolver problemas de superficies cuadráticas

Mathematical errors in procedural knowledge when solving quadratic surface problems

Erros matemáticos no conhecimento procedural ao resolver problemas de superfície quadrática

Resumen

La resolución de problemas es un área crítica en la enseñanza de las matemáticas debido a que el estudiante tiene que poner en juego conceptos, habilidades, procedimientos y estrategias para tener éxito. El presente escrito muestra la caracterización de los tipos de errores matemáticos en el conocimiento procedimental que evidencia un grupo de estudiantes cuando resuelve problemas de superficies cuadráticas en Cálculo Vectorial. El trabajo tuvo como referente la teoría de dos estadios: la traducción y la solución de Mayer para resolver problemas y la clasificación de errores según Rico L. El estudio fue de tipo exploratorio y descriptivo. Para la recolección de información se diseñó y aplicó un cuestionario específico con preguntas de respuesta cerradas y abiertas. Entre los principales hallazgos se resalta que el 32% de los participantes utiliza equivocadamente los datos presentes en el enunciado, el 56% comete errores algebraicos, el 41% representa erróneamente la gráfica correspondiente, el 26% dejó en blanco la representación gráfica, el 44% utiliza teoremas o definiciones deformadas y el 60% se equivoca verificando la solución hallada. Lo anterior ratifica la importancia que tiene el conocimiento procedimental en la resolución de problemas independientemente de los factores o causas que los pueden haber originado, motivando a docentes del área en la búsqueda de soluciones a este tipo de dificultad, utilizando el error como fuente de las actividades de enseñanza.

Palabras clave: conocimiento procedimental, definiciones deformadas, dificultades, resolución de problemas superficies cuadráticas.

Abstract

Problem solving is a critical area in the teaching of mathematics, due to the fact that the student has

Fecha de recepción del artículo: 23 de enero de 2016
Fecha de aceptación del artículo: 9 de jumio de 2016
DOI: http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v8i1.348

* Licenciada en Matemáticas y Computación de la UFPS. Magíster en Educación Matemática UNET. Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Cúcuta. Docente Universidad Francisco de Paula Santander. Contacto: rosavirginia@ufps.edu.co

to implement concepts, abilities, procedures and strategies to succeed. This paper shows the characterization of the types of mathematical errors in the operative knowledge evidenced in a group of students when they solve problems of quadratic surfaces in Vectorial Calculus. This work had as reference the two stage theory of Mayer to solve problems and classification of errors according to Rico L. The study was based on an exploratory and descriptive focus. For the recollection of information an specific open and closed question questionnaire was designed and applied. One of the main findings highlighted is that 32% of the participants wrongly uses the data presented in the enunciate, 56% commit algebraic errors, 41% represent the correspondent graph erroneously, 26% left the graphical representation blank, 44% utilize deform definitions or theorems and 60% make mistakes verifying their found answers. The above rectifies the importance that procedural knowledge has in the solution of problems, independent of the factors or causes that may have originated. This motivates teachers of the area in the search for solutions of this difficulty, utilizing the errors as the source of the teaching activities.

Keywords: deformed definitions, difficulties, problem solving, procedural knowledge, quadratic surfaces.

Introducción

Los errores matemáticos son preocupación permanente para los docentes del área. En los procesos de construcción del conocimiento matemático es normal que estos se presenten, pero si no se corrigen a tiempo pueden perdurar a lo largo de toda la vida, influyendo en el aprendizaje de esta disciplina. Según Rico (1995), "no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basados sobre conocimientos adquiridos previamente" y cuando un alumno comete un error "expresa el carácter incompleto de su conocimiento" (p. 6). Para Brousseau, Davis & Werner (1986) (citados por Engler, Gregorini, Müller, Vrancken & Hecklein, 2004), "los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de manera muy original, muy diferente a lo que esperan sus profesores. De hecho cuando el modo de pensamiento omite algo que es esencial, decimos inusualmente que el estudiante ha cometido un error" (p. 25).

El cálculo vectorial es fundamental para la formación de matemáticas avanzadas en ingeniería, ciencias aplicadas y sociales. Los estudiantes en estos campos necesitan dominio de estos conceptos para describir las observaciones y comunicarse dentro de su disciplina científica (Trigueros & Martínez-Planell, 2010). Cuando intentan resolver problemas que involucran conceptos de superficies cuadráticas, deben poner en juego conceptos, habilidades, procedimientos y estrategias provenientes de cursos anteriores e incluso de niveles educativos precedentes. Las dificultades y errores matemáticos son frecuentes especialmente en factorización, resolución de ecuaciones y representaciones gráficas. En sus escritos Kashefi, Ismail & Yusof (2010*)* y Kashefi, Ismail, Yuso & Rahman (2011) argumentan que cuando los estudiantes son enfrentados a problemas no rutinarios y a la resolución de problemas de funciones de dos variables, se les dificulta la representación gráfica, el uso de los símbolos y la formulación de modelos matemáticos. Por su parte Álvarez (2004), Engler, Gregorini, Müller, Vrancken & Hecklein (2004), Rico (1995), Páez (2011)están de acuerdo en que se deben buscar métodos de enseñanza a través de la resolución de problemas, capaces de mantener un equilibrio entre ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades, al mismo tiempo que a desarrollar su comprensión y habilidades para dar sentido a nuevos conocimientos matemáticos, mejorando competencias y técnicas matemáticas de acuerdo con las exigencias del presente y futuro.

Mayer (1986) afirma que un objetivo importante de la educación es ayudar a los estudiantes a ser solucionadores efectivos de problemas; es decir, personas que puedan generar soluciones útiles y originales cuando se enfrenten con problemas que nunca han visto antes. Este autor se cuestiona: "¿Por qué los problemas matemáticos son tan difíciles de resolver? ¿Por qué es tan difícil enseñar a nuestros niños y jóvenes, cómo se han de resolver estos problemas?" (p. 406). Skemp (1987) (citado en Mayer, 1986) indica que "Los problemas del aprendizaje y la enseñanza son problemas psicológicos, y antes de poder avanzar en la enseñanza de la matemáticas, tenemos que saber más acerca de cómo se aprende" (p. 406). Igualmente, no se puede dejar de lado al esfuerzo que hacen los estudiantes para aprender matemáticas; sin embargo, esto ha ocasionado repitencia, deserción y hasta frustración; por lo tanto, se recomienda revisar y ajustar los procesos de selección y admisión de los aspirantes al ingresar a la universidad para detectar tempranamente los potenciales desertores y hacer el respectivo seguimiento a su trayectoria académica (Ruiz, Carranza & Castro, 2012).

Company y otros (1988) (citado por Checa & Martínez-Artero, 2010) hacen referencia a las dificultades más comunes que presentan los estudiantes en la resolución de problemas: deficiente comprensión lectora, complejidad del texto, representación mental del problema, dificultad de localizar las metas a alcanzar que faciliten la solución, familiaridad del sujeto con los procedimientos necesarios para resolver el problema, utilización de un plan adecuado, conocimiento del procedimiento operativo y factores afectivos.

Si lo que se pretende en el estudiante, según Solaz (2014), es que obtenga un aprendizaje significativo hacia la resolución de problemas, el cual siempre ha estado presente cobrando cada vez mayor importancia, es prioritario que el conocimiento sea tratado en conjunto. Es por esta razón que para los investigadores Engler, Gregorini, Müller, Vrancken & Hecklein (2004) se hace referencia al error cometido por el estudiante al intentar resolver un problema, tomando protagonismo por parte del docente con el objeto de mejorar el quehacer pedagógico y la forma de impartir el conocimiento mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones.

Con el fin de obtener mejores logros de aprendizaje, según García, Segovia & Lupiáñez, (2011), los estudiantes deben reconocer y admitir que los errores influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos de las matemáticas. Por esta razón, Obando & Múnera (2003) afirman que es importante que el profesor reorganice los procesos de enseñanza aprendizaje que se dan al interior del aula, de tal forma que permitan modificar las prácticas al presentar los problemas matemáticos. Para este proceso, se requiere proveer las condiciones necesarias para que el estudiante pueda explorar y activar los conocimientos previos que se convierten en una oportunidad para identificar los obstáculos que pueden tener en su proceso de aprendizaje (Barrantes, 2006).

En este sentido, como lo manifiesta Serna (2014), "bajo la visión compleja de la realidad, un problema se hace solución y la solución otro problema" (p. 31); estas diferencias se hacen evidente entre operaciones matemáticas, estableciendo relaciones que posibilitan la construcción de esquemas mentales que hagan posible la aplicación contextual del saber matemático. Dentro del quehacer pedagógico del docente se requiere que el estudiante pueda desatar las habilidades básicas del pensamiento que le permitan adquirir la capacidad de observar fenómenos de lo complejo a lo simple y de lo simple a lo complejo, e incrementar sus propias potencialidades en la conciencia misma de su saber matemático en torno a la resolución de problemas, con lo cual se construye sentido de vida, utilidad práctica y consolidación de saberes.

En consecuencia, la presente investigación tuvo como propósito caracterizar los errores matemáticos en el conocimiento procedimental, en un grupo de estudiantes cuando resuelven problemas de superficies cuadráticas.

Marco conceptual

El trabajo tuvo como fundamentación la teoría de dos etapas para la resolución de problemas matemáticos propuesta por Mayer (1986) centrada, específicamente, en el conocimiento operativo y la clasificación de errores matemáticos según (Rico, 1995).

Resolución de problemas

Resolver problemas matemáticos, según Mayer (1986), es transitar por dos estadios: traducción y solución, cada uno de ellos requiere diferentes tipos de conocimiento. Para la primera etapa, es necesario conocimiento lingüístico, semántico y esquemático. En el primero se necesita conocimiento del idioma en el que se presenta o está redactado el problema, lo que implica reconocer el significado de las palabras. Para el segundo, conocimiento de los hechos acerca del mundo real y capacidad para realizar conversiones de medida y de tiempo. El conocimiento esquemático está relacionado con la capacidad de identificar los tipos de problemas, en otras palabras, poder asociar los problemas con sus esquemas. Entretanto, para la segunda etapa, se requiere conocimiento operativo y estratégico. El primero reconocido como el proceso mental para llevar a cabo la secuencia de operaciones algebraicas y el segundo, mediante el aprendizaje de técnicas para saber cómo utilizar los diversos tipos de conocimientos y estrategias disponibles para resolver un problema dado.

Para Quiroga (2010), se debe concebir la resolución de problemas como un objetivo fundamental en la enseñanza de las matemáticas y no solo como medio de transmisión de conceptos que hacen que el estudiante desarrolle su proceso de pensamiento; según Martínez, Vergel, Zafra (2016), el principal objetivo hacia la resolución de problemas es que los procesos de enseñanza no sean abordados en forma mecánica y memorística por el estudiante, sino que el profesor a través de buenos recursos pedagógicos y didácticos valore los procesos, se den espacios para compartir el pensamiento matemático y que estos problemas sean en torno a situaciones de la vida cotidiana, de tal forma que se logre despertar el interés de aprendizaje del estudiante, y este, a su vez, valore las matemáticas como un área fundamental en su formación.

Conocimiento operativo

El nivel de las operaciones concretas empieza a formarse en el niño a partir de los dos años y hasta los siete años; se produce una abstracción refleja que extrae de las estructuras inferiores los materiales para construir las superiores (Artero & Checa, 1994). Se establece un primer equilibrio cuando un concepto comienza por ser preoperatorio; este no permite la reversibilidad llamándolo funcional, en tanto que, cuando se integran las distintas funciones en un todo, se constituye una operación, se hace reversible y el equilibrio es operacional. Por lo tanto, se distinguen dos formas de equilibrio: el operacional que es reversible y supone una operación, y el funcional o irreversible que se alcanza mediante la intuición .

Construir la representación de un problema y calcular su solución, son dos fases que interactúan pero que no utilizan los mismos procesos mentales. En el primer caso, están los procesos de categorización para la construcción de la representación y, en el segundo, los procesos calculatorios (Descaves & Butlen, 1999; Martínez, Vergel, Zafra, 2015).

Una vez que el estudiante comprende el enunciado del problema se requiere un conocimiento adicional para llegar a la solución; en esta etapa de la resolución del problema se intentan conocer los procedimientos y cálculos que se utilizan en las matemáticas como procesos algebraicos y algorítmicos para llegar a la respuesta del problema (Sabagh Sabbagh, 2008). Un algoritmo es un procedimiento exacto para llevar a cabo una tarea como, por ejemplo, sumar números, de modo que el conocimiento operativo de una persona incluye algoritmos aritméticos (Mayer. *Thinking, problem solving, cognition*. Traducido por Graziella Baravalle, 1986).

Errores matemáticos

Muy a menudo en la resolución de problemas, los estudiantes utilizan algoritmos ligeramente defectuosos con uno o más fallos intentando llegar a la respuesta correcta, y otras veces puede cometer uno o más errores (Mayer. *Thinking, problem solving, cognition*. Traducido por Graziella *Baravalle*, 1986). Se declara que los primeros estudios sobre la determinación de los errores en matemáticas aparecen en las primeras décadas del siglo XX; a partir de la década del sesenta, las investigaciones sobre los errores con aplicaciones e implicaciones en la esfera de la educación comenzaron a proyectarse en forma notable con una visión constructivista (Plous y otros, 2009).

Para muchos investigadores, se transformó en una cuestión de especial interés el análisis de los errores en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos. Evidentemente, estos errores influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos del estudiante, siendo imprescindible que los estudiantes reconozcan y asuman la necesidad de superar estos obstáculos a fin de obtener logros de aprendizaje. Analizar los errores, especialmente hacia la resolución de problemas, le permite al docente organizar estrategias para un mejor aprendizaje (Engler, Gregorini, Müller, Vrancken & Hecklein, 2004).

En este sentido, Rico (1995) (citado Plous y otros, 2009) analizó una investigación sobre errores cometidos en matemáticas por estudiantes de secundaria, realizó una clasificación empírica de los errores sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de la siguiente forma:

- Datos mal utilizados
- Interpretación incorrecta del lenguaje
- Inferencias no válidas lógicamente
- Teoremas o definiciones deformadas
- Falta de verificación en la solución
- Errores técnicos que incluyen los errores de cálculo al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y en otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Metodología

La investigación fue cuantitativa de tipo exploratorio descriptivo. La población estuvo conformada por un grupo de 80 estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Francisco de Paula Santander, quienes cursaron la asignatura Cálculo Vectorial durante I semestre académico de 2016. El muestreo fue no probabilístico. El 77,50% de los integrantes son hombres; el 40% estudian Ingeniería Mecánica, el 39% Ingeniería de Sistemas, el 9% Ingeniería Civil, 8% Ingeniería Industrial y el 4% Ingeniería de Minas.

Para la recolección de información, se diseñó un cuestionario sobre resolución de problemas de superficies cuadráticas que involucran temas acerca de elipsoide, paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico, cono elíptico, hiperboloide de una hoja e hiperboloide de dos hojas. La rigurosidad de los instrumentos se garantizó a través de un proceso de validación llevado a cabo por medio de la técnica del juicio de expertos.

Resultados

Para la valoración del instrumento se tuvieron en cuenta los siguientes tipos de errores: datos mal utilizados, errores algebraicos, representación gráfica, teoremas o definiciones deformadas y falta de verificación a la solución, según Rico (1995).

El tema de superficies cuadráticas corresponde a la primera unidad de la asignatura Cálculo Vectorial para los estudiantes que se encuentran cursando diversos programas de la Facultad de Ingeniería. La superficie cuadrática es la gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables *x, y* y *z*. La ecuación más general es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Donde *A, B* y *C,…, J* son constantes. Las superficies cuadráticas son las contrapartes en tres dimensiones de las secciones cónicas en el plano.

El material que podían utilizar para resolver los problemas además de los implementos básicos fueron las hojas de superficies cuadráticas de cualquier libro de cálculo vectorial y calculadora científica.

Problema 1. Resolver paso a paso el ejercicio, identificando la superficie cuadrática reduciéndola a la forma estándar; calcular su centro, sus vértices, graficar las trazas y la respectiva superficie cuadrática:

$$16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$$

En el desarrollo del primer problema se evidenció dificultad de expresión, es decir, muy pocos estudiantes escribieron el proceso conceptual que se debía describir el paso a paso para lograr llegar a la solución (figura 1).

ESCRIBO PASO A PASO	RESUELVO EL EJERCICIO $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$
Paso 1: Ordeno y Simplifico	Resuelvo: $16x^2 - 32x + 9y^2 - 36y + 16z^2 = -36$ $16(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 16z^2 = -36$
Paso 2: Completo Cuadrados	Resuelvo: $16(x^2 - 2x - 1 + 1) + 9(y^2 - 4y - 2 + 2) + 16z^2 = -36$ $16(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 16z^2 - 16 - 18 = -36$
Paso 3: Paso Valores despues del igual Realizo Operaciones	Resuelvo: $16(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 16z^2 = -36 + 34$ $16(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 16z^2 = -2 \ (\div -2)$ $8(x^2 - 2x) + \frac{9}{2}(y^2 - 4y) + 8z^2 = 1$
Paso 4: Organizo la función	Resuelvo: $\frac{(x^2 - 2x)}{1/8} + \frac{(y^2 - 4y)}{2/9} + \frac{z^2}{1/8} = 1$

Figura 1. Procedimiento primer problema. Fuente: resultado de las pruebas.

La figura 2 muestra errores en las representaciones gráficas ya que se debía tener en cuenta que la superficie tiene su centro diferente del origen; esto se presentó debido a que previamente se cometieron errores de tipo algebraico al no lograr reducir la ecuación a la forma estándar y poder identificar las trazas y la superficie correctamente.

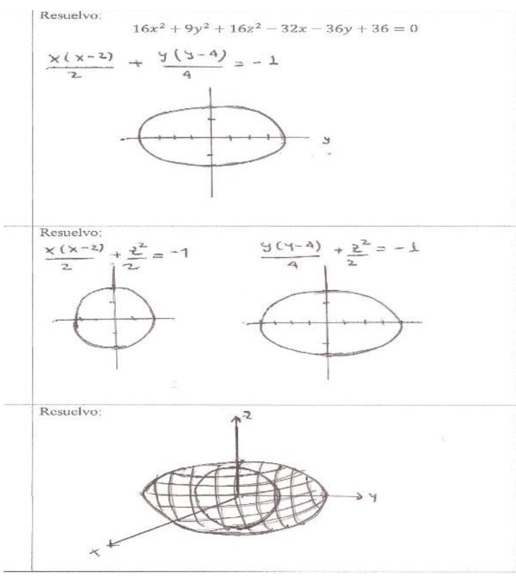

Figura 2. Gráfica de la superficie del primer problema. Fuente: resultado de las pruebas.

Los errores más frecuentes en el primer problema fueron: 55% algebraicos, 31% datos mal utilizados, 25% representación gráfica, 43% teoremas o definiciones deformadas y 53% falta de verificación a la solución hallada.

Problema 2. Resolver paso a paso el ejercicio, identificando la superficie cuadrática, su centro, sus vértices, graficar las trazas y la respectiva superficie cuadrática.

$$9x^2 + y^2 - 9z^2 - 54x - 4y - 54z + 4 = 0$$

El tiempo de dos horas (2) para responder el cuestionario fue para algunos estudiantes muy corto; el 30% no llegaron a completar la solución del ejercicio dejando el procedimiento del cuestionario incompleto, es decir, los estudiantes no terminaron la parte gráfica, las trazas y la superficie cuadrática correspondiente.

El 33% cometieron el error de aplicar datos mal utilizados, el 58% resolvieron de forma incorrecta los procesos algebraicos del segundo problema por errores en la factorización, específicamente el caso de completar cuadrados perfectos como lo evidencia la figura 3**.**

ESCRIBO PASO A PASO	RESUELVO EL EJERCICIO $9x^2 + y^2 - 9z^2 - 54x - 4y - 54z + 4 = 0$
Paso 1: Organizo y Simplifico Completo Cuadrados	Resuelvo: $9x^2 - 54x + y^2 - 4y - 9z^2 - 54z + 4 = 0$ $9(x^2 - 6x) + y^2 - 4y - 9(z^2 - 6z) = -4$ $9(x^2 - 6x + 9 - 9) + y^2 - 4y - 9(z^2 - 6z + 9 - 9) = -4$
Paso 2: Paso Valores despues del igual y realizo operaciones	Resuelvo: $9(x^2 - 6x) + y(y-4) - 9(z^2 - 6z) + 81 - 81 = -4$ $9(x^2 - 6x) + y(y-4) - 9(z^2 - 6z) = -4 \ (\div -4)$ $\frac{9}{-4}(x^2 - 6x) + y\frac{(y-4)}{-4} - \frac{9}{-4}(z^2 - 6z) = 1$
Paso 3: Organizo la función	Resuelvo: $-\frac{(x^2 - 6x)}{4/9} - \frac{y(y-4)}{4} + \frac{(z^2 - 6z)}{4/9} = 1$

Figura 3. Solución superficie cuadrática del segundo problema. Fuente: resultado de las pruebas.

Para el segundo problema, se aumentaron los tipos de errores en comparación al primer problema. La figura 4 muestra el error gráfico del segundo problema: el 51% representó incorrectamente la gráfica de la superficie cuadrática y el 66% no verificó la solución, siendo este el mayor error cometido por los estudiantes.

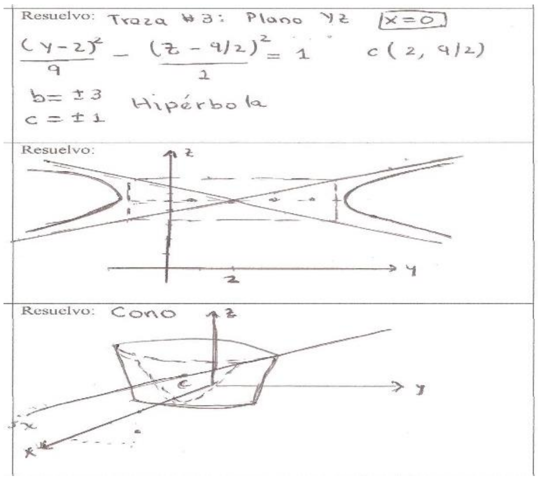

Figura 4. Error gráfico del segundo problema.

Discusión

El propósito del presente estudio fue caracterizar los errores matemáticos en el conocimiento operativo en un grupo de estudiantes cuando resuelven problemas de superficies cuadráticas, fundamentado en las teorías de resolución de problemas matemáticos propuesta por Mayer (1986), específicamente, hacia el conocimiento operativo y la clasificación de errores matemáticos según Rico (1995). A continuación, se presentan algunas consideraciones relacionadas con los resultados y el soporte teórico.

En los resultados se evidenció que los procedimientos algebraicos son los errores mayormente cometidos por los estudiantes cuando intentan resolver un problema matemático. Como lo manifiestan Ortega, Lozano & Tristancho (2014), es importante el uso de las tecnologías, específicamente las App, ya que estas herramientas permiten a los estudiantes explorar, interpretar, descubrir, conjeturar, ejemplificar, hacer deducciones, justificar, poner a prueba argumentos, desarrollar conceptos e identificar los errores matemáticos en los procedimientos para mejorar competencias generales, procedimentales, conceptuales y actitudinales hacia la resolución de problemas. Con la incorporación de las TIC, el aprendizaje dejaría de ser una mera recepción y memorización de datos recibidos en la clase, pasando a requerir una búsqueda permanente, análisis y reelaboración de informaciones obtenidas en la red. De este modo, el estudiante deja de ser un procesador activo de información, convirtiéndose en constructor significativo de la misma, en función de sus experiencias y conocimientos previos (Mayer, 2000).

En el intento de comprender por qué las matemáticas producen tanto fracaso escolar, acorde con los investigadores Ortega, Duarte & Lozano (2015), los profesores a través de sus investigaciones hacia la enseñanza de las matemáticas logran desarrollar una indagación metódica de la naturaleza y el contexto de los procesos para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades y conocimientos matemáticos. Por esta razón es importante tener en cuenta que a partir del ingreso de los estudiantes a la universidad, se requieren espacios en el aula para identificar los errores matemáticos y las dificultades de los estudiantes hacia el aprendizaje del cálculo; esto permitirá en el estudiante adquirir la capacidad de resolver problemas matemáticos.

Según Andrade & Atencia (2013), con la incorporación de las TIC, el aprendizaje dejaría de ser una mera recepción y memorización de datos recibidos en la clase, pasando a requerir una búsqueda permanente, análisis y reelaboración de informaciones obtenidas en la red. De este modo el estudiante deja de ser un procesador activo de información, convirtiéndose en constructor significativo de la misma, en función de sus experiencias y conocimientos previos (Mayer, 2000).

Para Carreño (2014) resulta pertinente y oportuno desarrollar estudios que permitan hacer partícipes a los estudiantes en la investigación, como nueva forma de adquirir conocimiento especialmente en las áreas del cálculo; la preocupación como miembro activo de un programa universitario obedece a la forma como se están formando los estudiantes, ya que se limitan simplemente a una continuación y repetición de información o de temas relacionados con un área determinada, siendo pasivos y alejados en gran parte de la práctica social. Ante este déficit, se están buscando alternativas, en el ámbito investigativo, para fortalecer al docente en sus prácticas pedagógicas identificando los errores cometidos por parte del estudiante, a través de la resolución de problemas; este proceso no ha sido fácil, siendo bastante lento a pesar de que se están utilizando herramientas tecnológicas tales como software matemático (Kaschefi, Ismail, Yusof & Rahman, 2012; Contreras, 2012).

La mejor alternativa para aproximarnos al estudio de los errores y dificultades de los estudiantes cuando resuelven un problema matemático es hacer un análisis conceptual de todos los elementos que intervienen en cada una de las nociones fundamentales del currículo de matemática; según Andrade & Atencia (2013), ante esta falta de actividad académica y el uso de las tecnologías se ha aumentado el bajo rendimiento académico y la deserción en los diferentes programas que ofertan las instituciones de educación superior, no siendo ajena a esta situación la Universidad Francisco de Paula Santander.

Conclusiones

Los estudiantes aplicaron datos mal utilizados al intentar resolver los dos problemas de superficies cuadráticas, agregando términos algebraicos que no existían en el enunciado para el procedimiento algebraico de completar cuadrados; igualmente, omitieron términos al transcribir el enunciado del problema. Teniendo en cuenta que los estudiantes utilizaban calculadora, los errores de tipo algebraico presentados al resolver los dos problemas de superficies cuadráticas fueron la simplificación de términos independientes, despejar un término y multiplicación de signos.

El error de representación icónica se presentó al graficar incorrectamente la superficie cuadrática y las trazas en cada problema. En los resultados, se evidenciaron dificultades para identificar el término que reduce la ecuación de intersección a los planos *XY, XZ* y *YZ* identificando los ejes, la nominación correcta de los ejes, y la ubicación de los vértices y el centro de cada figura.

En el caso de factorización, completar el trinomio cuadrado perfecto y el de factor común, se categorizaron como teorema o definición deformada; según los resultados, fueron los errores que más cometieron los estudiantes al intentar representar la ecuación de la superficie cuadrática a la forma estándar.

El segundo error más cometido fue la falta de verificación a la solución debido a que los estudiantes no están acostumbrados a revisar paso a paso los procesos conceptuales que se requieren para llegar a la solución de un problema; además, para el segundo problema más del 50% de los estudiantes no alcanzaron a solucionarlo.

Los resultados muestran la importancia del conocimiento procedimental en la fase de resolución de problemas y motiva a los docentes a utilizar el error como fuente inagotable en el diseño e implementación de actividades de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Álvarez, R. P. (2004). Formación superior basada en competencias, interdisciplinariedad y trabajo autónomo del estudiante. *Revista iberoamericana de Educación.*, 8.

Andrade, A. A. & Atencia, F. G. (2013).). Incorporación de las TIC en las metodologías de los docentes de especialización en docencia de cecar. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 5(1): 22-38.

Artero, R. M. & Checa, A. N. (1994). Psicología piagetiana y educación matemática. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (21): 59-70.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(2).

Brousseau, G., Davis, R. B. & Werner, T. (1986). *Observing students at work. In Perspectives on mathematics education. Springer Netherlands.*

Carreño, V. G. (2014). La investigación: Un aprendizaje de vida. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 6(1): 53-60.

Checa, A. N. & Martínez-Artero, R. N. (2010). Checa, A. N. & Martínez-Artero, R. N. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1): 317-341.

Contreras Bello, Y. (2012). Los elementos de la investigación: como reconocerlos, diseñarlos y construirlos. Autor: Hugo Cerda Gutiérrez. Colombia: Editorial Magisterio, 2011, 521 pp. Revista Logos Ciencia & Tecnología, 4(1), 220-221. doi:http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v4i1.183

Descaves, A. & Butlen, D. (1999). Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège. *In Actes du 26ème Colloque de la Corirelem.*

Engler, A., Gregorini, M. L., Müller, D., Vrancken, S. & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Boletín de la Soarem*, 6.

García, J., Segovia, L. & Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. *Funes Uniandes*, 145-155.

Kaschefi, H., Ismail, Z., Yusof, Y. M. & Rahman, R. A. (2012). S*upporting Students Mathematical Thinking in the Learning of Two-Variable Functions Through Blended Learning*. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46: 3689-3695.

Kashefi, H., Ismail, Z. & Yusof, Y. M. (2010). *Obstacles in the Learning of Two-variable Functions through Mathematical Thinking Approach. Procedia - Social and Behavioral Sciences,* 8: 173-180.

Kashefi, H., Ismail, Z., Yuso, Y. M. & Rahman, R. A. (2011). *Promoting Creative Problem Solving in Engineering Mathematics through Blended Learning. In Engineering Education (ICEED), 2011 3rd International Congress on IEEE*, 8-13.

Mayer. (1986). *Thinking, problem solving, cognition. Traducido por Graziella Baravalle.* Barcelona: Ediciones Paidós. p. 480.

Mayer. (2000). Diseño educativo para un aprendizaje constructivista. . In Diseño de la instrucción: teorías y modelos: un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción. *Santillana*, 153-172.

Martínez Lozano, J., Vergel Ortega, M., & Zafra Tristancho, S. (2015). Validez de instrumento para medir la calidad de vida en la juventud: VIHDA. *Revista Logos Ciencia & TecnologíA*, 7(1), 20-28. Recuperado de http://revistalogos.policia.edu.co/index.php/rlct/article/view/206

Martínez Lozano, J., Vergel Ortega, M., & Zafra Tristancho, T. (2016). Ambiente de aprendizaje lúdico de las matemáticas para niños de la segunda infancia. Revista Logos Ciencia & TecnologíA, 7(2), 17-25. Recuperado de http://revistalogos.policia.edu.co/index.php/rlct/article/view/234/274

Nortes, A. & Martínez, R. (1996). Ansiedad ante los exámenes de matemáticas. *Épsilon* 34: 111-120.

Obando, G. & Múnera, J. J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y Pedagogía.*

Ortega, M. V., Duarte, H. I. & Lozano, J. M. (2015). Desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de cálculo integral su relación con la planificación docente. *Revista Científica*, 3(23): 19-32. doi:http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a2

Ortega, M. V., Lozano, J. M. & Tristancho, S. L. (2014). APPS en el rendimiento académico y autoconcepto de estudiantes de ingeniería. *Revista Logos Ciencia & Tecnología,* 6(2): 198-208. DOI: http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v6i2.21

Páez Páez, J. (2011). Competencias presentadas por los docentes del programa de sistemas de la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central, con respecto al uso de las TIC. Revista Logos Ciencia & Tecnología, 3(1), 56-65. doi:http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v3i1.106

Plous, C. B., Roldán, C. L., Columbié, C. M., Sayú, C. M., Pérez, C. A., Montaño, C. R. & Ruiz, M. G. (2009). *Tratamiento de los errores frecuentes en el aprendizaje de la matemática, el español y las ciencias naturales.* La Habana: Educación Cubana.

Quiroga Ramírez, J. (2010). La Transversalidad curricular en los proyectos pedagógicos: El caso de El CED, el Motorista Bogotá. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 2(1), 50-57. doi:http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v2i1.66

Rico. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*.

Ruiz, L. R., Carranza, E. C. & Castro, D. P. (2012). Causales psicosociales de la deserción universitaria. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 4(1): 164-168.

Sabagh Sabbagh, S. (2008). Solución de problemas aritméticos redactados y control inhibitorio cognitivo. *Universitas Psychologica*, 7(1): 217-229.

Serna, J. R. (2014). Relación subjetiva-objetiva en el desarrollo del pensamiento matemático de objetos reales a objetos matemáticos en la educación, didáctica de las operaciones matemáticas. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 6(1): 18-35.

Solaz, A. M. (2014). La resolución de problemas en la prueba de Matemáticas de acceso a la universidad: procesos y errores. *Educatio siglo XXI,* 32(1): 233-254.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1): 3-19.